“DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FACTORIZACIÓN QUE FAVOREZCA EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO A TRAVÉS DE LOS JUEGOS TRADICIONALES EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO 8 Y 9 DEL INSTITUTO TECNICO SUPERIOR DE PEREIRA”

Autora

Ing. LUCIA TERESA CARDONA HERRERA

Director

Msc. Matemática FERNANDO MESA.

PEREIRA

2018

DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FACTORIZACIÓN QUE FAVOREZCA EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO A TRAVÉS DE LOS JUEGOS TRADICIONALES EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO 8 Y 9 DEL INSTITUTO TECNICO SUPERIOR DE PEREIRA

CANDIDATO A MAGISTER:

LUCIA TERESA CARDONA HERRERA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PEREIRA RISARALDA

2018

DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FACTORIZACIÓN QUE FAVOREZCA EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO A TRAVÉS DE LOS JUEGOS TRADICIONALES EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO 8 Y 9 DEL INSTITUTO TECNICO SUPERIOR DE PEREIRA

LUCIA TERESA CARDONA HERRERA

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magister en Enseñanza de la Matemática

DIRECTOR

MSC MATEMÁTICA FERNANDO MESA.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PEREIRA RISARALDA

2018

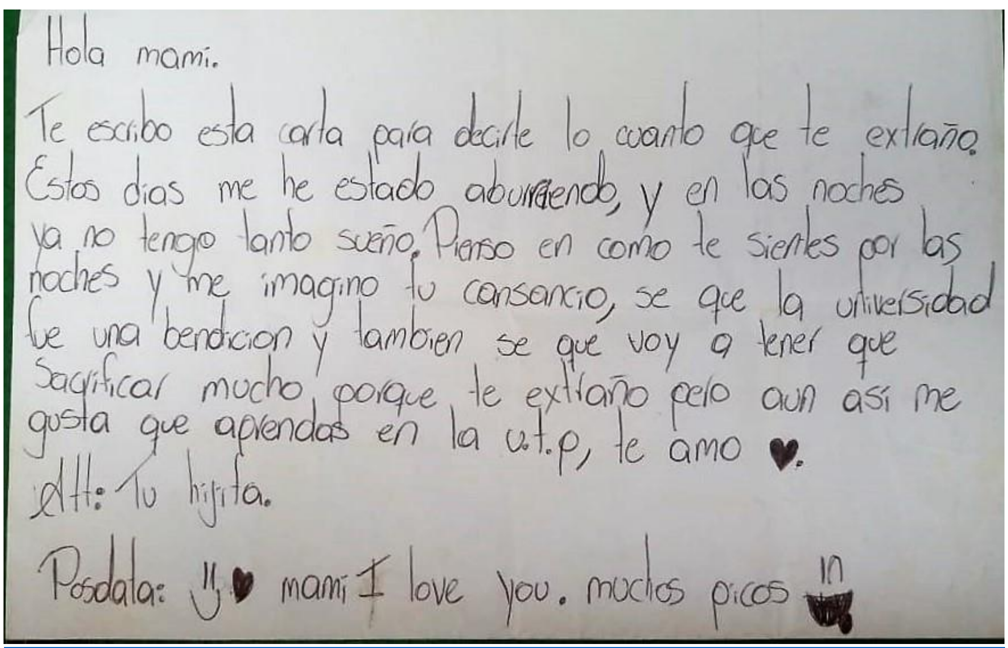
DEDICATORIA:

A Dios, porque es mi razón de vivir.

A mis hijos por ser el motivo para dar y amar, por todo el amor y apoyo que me brindan y por esta hermosa nota, que fue mi mayor motivación para llegar al final de este proceso. Los Amo.

A mi madre que siempre ha sido mi más grande apoyo.

Al amor de mi vida, Camel Yeddan Manrique Patiño, por siempre estar en los momentos más difíciles de mi vida. Te Amo.



Hola mami.

Te escribo esta carta para decirte lo cuanto que te extraño.
Estos dias me he estado aburriendo, y en las noches
ya no tengo tanto sueño, Pienso en como te sientes por las
noches y me imagino tu consancio, se que la universidad
fue una bendicion y tambien se que voy a tener que
Sacrificar mucho, porque te extraño pero aun así me
gusta que aprendas en la u.t.p, te amo ♥.
Att: Tu hijita.

Posdata: ♥ mami I love you. muchos picos

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar las gracias a todas las personas que han contribuido de una manera u otra a la realización de este trabajo de investigación.

Principalmente a Dios, quien me provee a diario de su amor y su misericordia para brindarme las bendiciones que hoy llenan mi vida.

En primer lugar, al Msc FERNANDO MESA, mi asesor del trabajo de grado, por su dedicación, paciencia y entusiasmo que le puso en cada asesoría. Estimado profesor, gracias por todo el apoyo brindado, por la motivación y por sus valiosas orientaciones durante el desarrollo de esta investigación.

A todos mis profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira, por sus enseñanzas y orientaciones.

A mi familia, por su compañía y comprensión.

A mis compañeros de estudio, por todos sus aportes en el desarrollo de la Maestría.

A mis estudiantes, por su valiosa participación y empeño en cada una de las actividades propuestas en clase.

Al rector de mi institución José Daniel Ocampo y al coordinador Reinaldo Loaiza Jaramillo, por su comprensión con mis estudios y apoyo con esta investigación y a mis compañeros Elkin López, Cristian Camilo Cañaveral y Carlos Soto porque en medio de sus ocupaciones siempre han estado apoyándome en el desarrollo de este trabajo.

A todos, mi gratitud y más sincero reconocimiento.

RESUMEN

La investigación está enmarcada a los grados octavos y novenos de la Institución Educativa Técnico Superior de Pereira; el diseñar e implementar una unidad didáctica a través de los registros de representación semiótica con situaciones didácticas (JUEGOS TRADICIONALES) que sean pertinentes para la enseñanza y el aprendizaje significativo de los métodos de factorización. La investigación se basó sobre tres puntos importantes que son: la innovación, la pertinencia y la actualidad.

Esta propuesta, permite identificar como los estudiantes logran pasar de lo más simple a lo más complejo en el estudio de las diferentes formas de factorizar en el álgebra e identificar las dificultades que se presentan en la enseñanza – aprendizaje de la factorización y sus diferentes registros de representación; medir antes y después del desarrollo de la unidad didáctica la capacidad de los alumnos para comprender problemas enmarcados en su contexto y que requieran el concepto de factorización, construir una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la Factorización y evaluar la actitud hacia la matemática en los estudiantes y los cambios que la aplicación de la lúdica produce en ella, para alcanzar el éxito y no el fracaso en el aprendizaje de la factorización.

Palabras claves: Álgebra, Factorización, Lúdica, Polinomios, Raíces, Teorema de factor y residuo.

ABSTRACT

The research is framed in the eighth and ninth grades of the Higher Technical Educational Institution of Pereira.

Design and implement a didactic unit through semiotic representation registers with didactic situations that are relevant for teaching and meaningful learning of factoring methods.

We base the research on three important points that are: innovation, relevance and topicality.

This proposal allows identifying how students manage to move from the simplest to the most complex in the study of the different ways of factoring in algebra and identifying the difficulties that arise in the teaching - learning of the factorization and its different representation registers. ; measure before and after the development of the didactic unit the ability of the students to understand problems framed in their context and that require the concept of factoring, construct a didactic proposal for the teaching and learning of Factoring and evaluate the attitude toward mathematics in the students and the changes that the application of the playful one produces in her, to reach the success and not the failure in the learning of the factorization

Keywords: Algebra, Factorization, Playful, Polynomials, Roots, Factor Theory and residue.

CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

INDICE DE ILUSTRACIONES

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este trabajo se puede identificar como una investigación en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, que es innovador, inclusivo y práctico, pues uno de sus propósitos y objetivos de estudio corresponde con los conocimientos matemáticos que se enseñan en el aula de clase con la finalidad especifica que éstos sean aprendidos en situaciones escolares con un manejo lúdico.

El área de matemáticas, en particular el álgebra se ha constituido para los estudiantes de grado 8 y 9 de básica secundaria, como una asignatura de difícil comprensión, la cual evitan presentando dificultades para su aprendizaje; al llegar al grado octavo y noveno de acuerdo a los lineamientos curriculares, los estándares básicos de competencias y los DBA en matemáticas del MEN, donde se enseña y aprende lo referente a la factorización puede evidenciarse basados en la experiencia de los docentes que enseñan en estos grados y los resultados obtenidos por los estudiantes en los grados superiores y aún en la universidad, que la factorización es uno de los temas que la mayoría de los estudiantes tienen problemas en aprender; dicha falencia puede deberse a dos tipos de factores primero dentro del objeto matemático: El reconocimiento del tipo de polinomio que implica dificultades con la utilización de números, letras y signos de operación; la utilización de los métodos de factorización para saber cuál de ellos emplear en determinado momento.

El segundo factor es el asociado al proceso socio – educativo en las aulas de clase que evidencian las siguientes situaciones:

1. Aulas de clase saturadas de estudiantes donde se desarrolla la clase con un promedio de 40 estudiantes, cuando lo recomendable es 25 estudiantes por tanto se dificulta brindar atención individual a todos los estudiantes.

2. Distractores en el aula de clase (celulares, computadoras, radios).

3. Escasez de recursos y medios didácticos

4. Desinterés estudiantil.

5. Indisciplina escolar.

6. Poca innovación de estrategias para desarrollar el contenido dentro del aula de clase.

Lo anterior nos permite concluir que en la mayoría de los casos existe una inadecuada didáctica aplicada al tema de la factorización lo que no permite que existan las condiciones necesarias para que se dé un aprendizaje significativo; según Ausubel, en su "Teoría del aprendizaje significativo" (Ausubel, 1978), una de las condiciones necesarias para que exista un verdadero aprendizaje significativo en los educandos es LA UTILIZACION DE

MATERIAL POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO. Es decir, crear o hacer uso, de material didáctico existente para el trabajo en el aula.

En el ITS de Pereira existen dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los temas relacionados con el álgebra principalmente de los grados 9 de la jornada de la tarde del año 2017, ello debido a que durante el año 2016 estos grupos que en ese momento cursaban el grado 8, no contaron por más de medio año con docente del área de matemáticas generando que los contenidos no pudieran ser impartidos, específicamente los relacionados con el tema de la factorización.

1.1. APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS

En el mundo actual los cambios constantes y rápidos en ciencia y tecnología han hecho que los conocimientos, las herramientas y las maneras de hacer y comunicar la matemática evolucionen constantemente. Por esto, tanto el aprendizaje como la enseñanza de la matemática deben estar enfocados en el desarrollo de destrezas necesarias para que el estudiante sea capaz de resolver problemas cotidianos y que esto le sea agradable y sea innovador, a la vez que se fortalece el pensamiento lógico y creativo, permitiéndole alcanzar la capacidad de discernir lo esencial de lo auxiliar y lo particular.

Lo anterior nos permite concluir que en la mayoría de los casos existe una inadecuada didáctica aplicada al tema de la factorización lo que no permite que existan las condiciones necesarias para que se dé un aprendizaje significativo; según Ausubel, en su "Teoría del aprendizaje significativo" (Ausubel, 1978), una de las condiciones necesarias para que exista un verdadero aprendizaje significativo en los educandos es LA UTILIZACION DE MATERIAL POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO; es decir, crear o hacer uso de material didáctico existente para el trabajo en el aula.

Los aprendizajes matemáticos, de modo muy especial, constituyen una cadena en la que cada conocimiento va enlazado con los anteriores de acuerdo con un proceder lógico. El nivel de dificultad de los contenidos no sólo viene marcado por las características del propio contenido matemático sino también por las características psicológicas y cognitivas de los alumnos. Esto ha de quedar reflejado en la selección y organización de los contenidos y puesto de manifiesto a la hora de la presentación de los mismos, ya que, en caso contrario, el alumno recibirá unos contenidos inconexos, fraccionados y poco estructurados, con las consiguientes dificultades y lagunas de aprendizaje (Carrillo, 2009 p. 9).

1.2.PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Qué situaciones didácticas son pertinentes para la enseñanza y el aprendizaje de la Factorización con estudiantes de los grados 8 y 9 del Instituto Técnico Superior de Pereira?

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar e implementar una unidad didáctica a través de los registros de representación semiótica con situaciones didácticas que sean pertinentes para la enseñanza y el aprendizaje significativo de los métodos de factorización con estudiantes de grados 8 y 9 del ITS.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar las dificultades que se presenta en la enseñanza – aprendizaje de la factorización y sus diferentes registros de representación, con estudiantes de 8 y 9 del ITS.

- Medir antes y después del desarrollo de la unidad didáctica la capacidad de los alumnos para comprender problemas enmarcados en su contexto y que requieran el concepto de factorización.

- Construir una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la Factorización con estudiantes de 8 y 9

- Generar recomendaciones que apunten a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la Factorización tomando como marcador la capacidad del alumno para identificar y registrar los casos de factorización presentes en situaciones problema algebraico.

- Proponer situaciones didácticas pertinentes para la enseñanza y el aprendizaje de los métodos de factorización con estudiantes de grados 8 y 9

- Evaluar la actitud hacia la matemática en los estudiantes y los cambios que la aplicación de la lúdica produce en ella.

3. JUSTIFICACION

La enseñanza de la matemática es la base para la formación y desarrollo de una conciencia lógica racional e intelectual de los estudiantes; dentro de este proceso de enseñanza-aprendizaje, los casos más comunes de factorización constituyen una experiencia positiva como marco de referencia para la complementación del pensamiento lógico que demandan los tiempos, cambios y trasformaciones de este tiempo; pero a pesar de los esfuerzos y las investigaciones aún sigue el mismo dilema: a los alumnos se les dificulta comprender el tema de FACTORIZACIÓN; en la asignatura de matemáticas, particularmente en los temas concernientes a operaciones básicas con polinomios y factorización, se ha llegado a conclusiones como las que se anotan a continuación:

- Los estudiantes no encuentran significado lógico a la información que los docentes les quieren comunicar, es decir, los polinomios como tal, y las operaciones entre ellos, no son relacionables con ninguna situación concreta que el estudiante conozca. (Alargia, 2002)
- Los recursos tradicionales (tiza y tablero), aunque son valiosos a la hora de explicar detalladamente aspectos fundamentales, se tornan realmente poco funcionales por lo extenso de los procesos que se llevan a cabo, principalmente en las operaciones de multiplicación y división.
- Existe un brecha grande entre la nueva información y los conceptos necesarios para que ella se incorpore en la estructura cognitiva del estudiante, es decir, cuando se habla de operaciones básicas con polinomios, no existe relación entre lo nuevo que se dice y lo que ya se sabe.[1]

En julio de 2016, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES– dio a conocer los resultados de las pruebas SABER aplicadas a los estudiantes de 3°, 5° y 9° grados para los años 2009, 2012, 2013 y 2014. El grado tercero incluye las áreas de lenguaje y matemáticas, y los grados quinto y noveno, también las áreas de ciencias naturales y pensamiento ciudadano. Con respecto a las matemáticas el ICFES concluyó lo siguiente:

En cuanto a los niveles de desempeño, en el 2014 encontramos las variaciones de mayor tamaño, donde es importante resaltar el movimiento de estudiantes de mínimo a insuficiente.

---

[1] Tomado de: Tesis Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica "caja de polinomios", en estudiantes de grado octavo de la I.E María Cano del municipio de Medellín, José Martin Villarroel Solis, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Medellín, Colombia, 2014; pag3
(Alargia, 2002) ensayo para generar pensadores Universidad de quito.

El desempeño general de los estudiantes en matemáticas es menor a medida que el ciclo analizado aumenta. Nuevamente, en el año 2014, el porcentaje de estudiantes ubicados en el nivel avanzado disminuye en el grado quinto con respecto de tercero, y en noveno con respecto de quinto.

La distribución de los estudiantes entre los niveles de desempeño está relativamente equilibrada, en quinto y noveno la población está agrupada en mayor medida en el nivel mínimo y se observa que está aumentando el porcentaje de estudiantes con menores desempeños. [2]

Esto nos permite entrever que existe una falencia en los docentes de matemáticas para la enseñanza de los temas de la asignatura para la vida y una clara falencia en el aprendizaje para la aplicación de los mismos en la cotidianidad del estudiante quienes manifiestan no entender para que les sirve los temas desarrollados.

Otros factores que apoyan las dificultades encontradas en el proceso de enseñanza aprendizaje:

- Comprensión de conceptos, relaciones, propiedades y aplicación
- Descontextualización con la vida cotidiana
- Interpretar las distintas representaciones de un mismo objeto matemático
- Bajos resultados en las pruebas saber que decrecieron en el último informe ICFES

Enseñar y aprender matemática puede y debe ser una experiencia feliz, el no solucionar la falta de interés y el temor por aprender factorización se ve reflejado en el nivel de competencia alcanzado por muchos de los estudiantes que les impide alcanzar los conceptos básicos necesarios para cursar satisfactoriamente las asignaturas de matemáticas a nivel de universidad; esto se refleja en las estadísticas de los cursos de Matemáticas básicas, de los dos últimos años[3], de la Universidad Tecnológica de Pereira, que se presentan a continuación:

[2] ICFES, Saber 3°, 5° y 9° - Resultados nacionales Periodo 2009 – 2014 pág. 25-26

[3] Tablas construidas con información de la Universidad Tecnológica De Pereira, Facultad De Ciencias Básicas, Departamento De Matemáticas

Tabla 1: Resultados de matemáticas UTP, 2015

MATEMATICAS BASICAS UTP				
SEMESTRE 2015-1				
MATERIAS	GANARON	PERDIERON	CANCELAN	TOTAL EST
AA112	43	26	0	69
CB112	579	317	0	896
TOTALES	622	343	0	965
%	64,46	35,54	0,00	100,00
AA113	23	4	0	27
CB113	244	226	0	470
TOTALES	267	230	0	497
%	53,72	46,28	0,00	100,00
AA563	85	35	54	174
CB115	530	383	337	1250
TOTALES	615	418	391	1424
%	43,19	29,35	27,46	100,00

MATEMATICAS BASICAS UTP				
SEMESTRE 2015-2				
MATERIAS	GANARON	PERDIERON	CANCELAN	TOTAL EST
AA112	29	21	0	50
CB112	353	406	32	791
TOTALES	382	427	32	841
%	45,42	50,77	3,80	100,00
AA113	23	9	10	42
CB113	210	223	114	547
TOTALES	233	232	124	589
%	39,56	39,39	21,05	100,00
AA563	94	67	68	229
CB115	165	135	103	403
TOTALES	259	202	171	632
%	40,98	31,96	27,06	100,00

Tabla 2: Resultados de matemáticas UTP, 2015 *tabla 2 referencia y resultados de la utp*

Tabla 3:: Resultados de matemáticas UTP, 2016

MATEMATICAS BASICAS UTP				
SEMESTRE 2016-1				
MATERIAS	GANARON	PERDIERON	CANCELAN	TOTAL EST
AA112	20	11	0	31
CB112	952	1013	405	2370
TOTALES	972	1024	405	2401
%	40,48	42,65	16,87	100,00
AA113	18	8	3	29
CB113	206	359	112	677
TOTALES	224	367	115	706
%	31,73	51,98	16,29	100,00
AA563	69	77	48	194
CB115	491	357	267	1115
TOTALES	560	434	315	1309
%	42,78	33,16	24,06	100,00

MATEMATICAS BASICAS UTP				
SEMESTRE 2016-2				
MATERIAS	GANARON	PERDIERON	CANCELAN	TOTAL EST
AA112	37	28	11	76
CB112	319	454	77	850
TOTALES	356	482	88	926
%	38,44	52,05	9,50	100,00
AA113	29	12	9	50
CB113	229	229	84	542
TOTALES	258	241	93	592
%	43,58	40,71	15,71	100,00
AA563	20	6	5	31
CB115	155	169	140	464
TOTALES	175	175	145	495
%	35,35	35,35	29,29	100,00

Por todo lo anterior, se requiere de nuevas estrategias que den solución a las dificultades presentadas por los estudiantes para plantear y resolver casos de factorización, con una propuesta que logre en los estudiantes la capacidad de ir desarrollando habilidades para reconocer el tipo de polinomio, la utilización de los métodos de factorización, interpretar los enunciados y usar lenguaje simbólico, aritmético, algebraico sin dificultades.

En consecuencia, se plantea la realización de la presente investigación para el diseño de una unidad didáctica para la enseñanza de la factorización que favorezca el aprendizaje significativo a través de los juegos tradicionales en los estudiantes de grado 8 y 9 del Instituto Técnico Superior De Pereira.

"Hacer las matemáticas más cercanas al ejercicio de la ciudadanía y a la comprensión del mundo para los diferentes actores de la comunidad educativa, implica demostrar que las matemáticas son para todos y se construyen con todos"[4]

---

[4] Documento Orientador Foro Educativo Nacional 2014: Ciudadanos Matemáticamente Competentes

4. MARCO TEORICO Y ESTADO DEL ARTE

4.1.TEORÍAS APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Es una teoría cognitiva que explica el proceso que se lleva a cabo para que ocurra el aprendizaje de lo que se enseña en las personas; fue propuesta por David Ausubel, quien propone lo siguiente:

El concepto central de la teoría de Ausubel es el de aprendizaje significativo, proceso a través de las cual nuevas informaciones adquieren significado por interacción (no asociación) con aspectos relevantes preexistentes en la estructura cognitiva que, a su vez, son también modificados durante ese proceso.

Para que el aprendizaje pueda ser significativo, el material debe ser potencialmente significativo y el aprendiz tiene que manifestar una disposición para aprender. La primera de esas condiciones implica que el material tenga significado lógico y que el aprendiz tenga disponibles, en su estructura cognitiva, subsumidores específicos con los cuales el material sea relacionable. (Moreira M., 1993). De la relación sustantiva y no arbitraria del material lógicamente significativo con la estructura cognitiva emerge el significado psicológico, cuyos componentes son típicamente idiosincráticos.

Cuando un individuo posee madurez intelectual suficiente para comprender conceptos y proposiciones presentados verbalmente, en ausencia de ilustraciones empírico-concretas, pero no dispone aún de los subsumidores necesarios para el aprendizaje significativo, se hace necesario el uso de organizadores previos que actúan como puente entre lo que él ya sabe y lo que precisa saber para aprender significativamente el nuevo material. En caso contrario, el aprendizaje será mecánico, esto es, el nuevo material quedará almacenado en la estructura cognitiva de manera literal y arbitraria, dificultando la retención.

El desarrollo cognitivo es, según Ausubel, un proceso dinámico en el que nuevos y antiguos significados están, constantemente, interactuando y dan como resultado una estructura cognitiva más diferenciada que tiende a una organización jerárquica, en la cual conceptos y proposiciones más generales ocupan la cúspide de la estructura y abarcan, progresivamente, proposiciones y conceptos menos inclusivos, así como datos factuales y ejemplos específicos. (Moreira, 2012)

El aprendizaje significativo ocurre cuando una persona consciente y explícitamente vincula nuevos conceptos a otros que ya posee. Cuando se produce ese aprendizaje significativo, se produce una serie de cambios en la estructura cognitiva, modificando los conceptos existentes, y formando nuevos enlaces entre ellos; Piaget menciona como los procesos del pensamiento se dan cuando se usan los conocimientos previos de los estudiantes:

“que los esquemas son organizaciones del pensamiento derivadas de las propias actividades del aprendiente que puede sufrir modificaciones al combinarse con otros esquemas o pueden extenderse, ampliarse a razón de nuevas experiencias, generándose así el aprendizaje”, (Piaget, 1956).[5]

Los conocimientos previos o subsumidores como lo llaman Ausubel y Moreira, son necesarios para que el estudiante obtenga un aprendizaje significativo; es importante en factorización que el subsumidor permita al estudiante tener claro los conceptos para resolver expresiones algebraicas, en temas básicos como son las operaciones con números enteros, potenciación, agrupación de términos, aplicación de teoremas, el concepto de área y de unidad cuadrada. Si los estudiantes no entienden estos temas, el docente está en la tarea de hacer una retroalimentación antes de empezar con la formalización de los conceptos involucrados.

Según Ausubel, un aprendizaje es significativo cuando los estudiantes relacionan los conocimientos que van a aprender con lo que ellos ya saben. Es decir, estas ideas se relacionan con algún aspecto existente y específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición (Ausubel, 1983,18); igualmente plantea que el aprendizaje significativo se da cuando hay un punto de anclaje entre las nuevas ideas, conceptos y proposiciones; esté anclaje está íntimamente relacionado con la claridad y relevancia de los ya aprendidos; Moreira lo plantea de la siguiente manera: “*el subsumidor es un concepto, una idea, una proposición ya existente en la estructura cognitiva, capaz de servir de “anclaje” para la nueva información de modo que esta adquiera así, significado para el individuo"(Moreira, 1993).*

El aprendizaje significativo es aquel aprendizaje en el que los docentes crean un entorno de instrucción en el que los alumnos entienden lo que están aprendiendo, es el que conduce a la transferencia; sirve para utilizar lo aprendido en nuevas situaciones, en un contexto diferente, por lo que más que memorizar hay que comprender.[6]

---

[5] Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM. Martha Eugenia Ospina Sepúlveda, Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, 2015. Página 22

MOREIRA, 2012 Métodos de aprendizaje matemáticos, viude land

[6] Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica “caja de polinomios”, en estudiantes de grado octavo de la I.E María Cano del municipio de Medellín. *José Martin Villarroel Solis, Universidad Nacional de Colombia, Medellín 2014. Pág. 7-8*
Ausubel, D.P. (1968). Educational psychology: a cognitive view. New York: Holt, Rinehart and Winston

El aprendizaje significativo se da mediante dos factores, el conocimiento previo que se tenía de algún tema, y la llegada de nueva información, la cual complementa a la información anterior, para enriquecerla. De esta manera se puede tener un panorama más amplio sobre el tema.

Ideas básicas del aprendizaje significativo:

a) Los conocimientos previos han de estar relacionados con aquellos que se quieren adquirir de manera que funcionen como base o punto de apoyo para la adquisición de conocimientos nuevos.

b) Es necesario desarrollar un amplio conocimiento meta cognitivo para integrar y organizar los nuevos conocimientos.

c) Es necesario que la nueva información se incorpore a la estructura mental y pase a formar parte de la memoria comprensiva.

d) Aprendizaje significativo y aprendizaje mecanicista no son dos tipos opuestos de aprendizaje, sino que se complementan durante el proceso de enseñanza.

Pueden ocurrir simultáneamente en la misma tarea de aprendizaje

e) Requiere una participación activa del discente donde la atención se centra en el cómo se adquieren los aprendizajes.

f) Se pretende potenciar que el discente construya su propio aprendizaje, llevándolo hacia la autonomía a través de un proceso de andamiaje. La intención última de este aprendizaje es conseguir que el discente adquiera la competencia de aprender a aprender.

g) El aprendizaje significativo puede producirse mediante la exposición de los contenidos por parte del docente o por descubrimiento del discente.

El aprendizaje significativo trata de la asimilación y acomodación de los conceptos. Se trata de un proceso de articulación e integración de significados. En virtud de la propagación de la activación a otros conceptos de la estructura jerárquica o red conceptual, esta puede modificarse en algún grado, generalmente en sentido de expansión, reajuste o

---

Piaget j, (1956) Aprendizaje Significativos en las nuevas estrategias cognitivas , Francia lenogt

Ausubel, D.P. (1983). Aquisição e retenção de conhecimentos. Lisboa: Plátano Edições Técnicas. Tradução do original The acquisition and retention of knowledge (2000).

reestructuración cognitiva, constituyendo un enriquecimiento de la estructura de conocimiento del aprendizaje. (Valencia Cárdenas, 2012)

Según Ausubel (1978, p.41),

"…la esencia del proceso de aprendizaje significativo es que ideas expresadas simbólicamente se relacionen, de manera sustantiva (no literal) y no arbitraria, con lo que el aprendiz ya sabe, o sea, con algún aspecto de su estructura cognitiva específicamente relevante (i.e., un subsumidor) que puede ser, por ejemplo, una imagen, un símbolo, un concepto o una proposición ya significativos".

"Una estrategia de aprendizaje es un procedimiento (conjunto de pasos o habilidades) que un alumno adquiere y emplea de forma intencional como instrumento flexible para aprender significativamente y solucionar problemas y demandas académicas" (Díaz Barriga, Castañeda y Lule, 1986).

4.2. REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA:

En el campo de las matemáticas se presentan varias representaciones para un mismo objeto; distinguir la representación del mismo es fundamental para que exista la comprensión del objeto matemático; Duval es uno de los exponentes que pone en evidencia que el aprendizaje de un concepto se realiza en una forma más efectiva si se trabajan diferentes representaciones del mismo.

A continuación, se presentan algunos apartes del artículo Los registros semióticos de representación en matemática de Oviedo, Lina Mónica, Kanashiro, Ana María.

"Según Raymond Duval (2004), el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. Los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática.

En matemática las representaciones semióticas son importantes tanto para los fines de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática. El tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Cuando realizamos cálculos numéricos vemos que existe una dependencia del sistema de escritura elegida: escritura decimal, escritura fraccionaria, escritura binaria, etc. Los tratamientos matemáticos no pueden llevarse a cabo prescindiendo de un sistema semiótico de representación. La función de tratamiento solo la pueden llevar a cabo las representaciones semióticas y no las representaciones mentales. "La utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática y para serle intrínseca" (Duval- 2004). El progreso de los conocimientos va acompañado por la creación y desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que coexisten con el primero de ellos, este es, la lengua natural.[7]

La noética es la adquisición, por parte del estudiante, del concepto matemático; la semiótica es el recurso de representación del concepto, las representaciones semióticas son todos los signos o gráficos que permiten a un individuo interactuar con el concepto del objeto y este puede darse en múltiples sistemas de representación. En general cada concepto matemático no es un objeto real por lo que está obligado a utilizar representaciones de distinta naturaleza.

Según Duval (1993) la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes: el uso de más de un registro de representación semiótica, la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos se constituye en símbolo de progreso de conocimiento.

Según Duval (1998), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:

- La presencia de una representación identificable.
- El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada...
- La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial
- Si se produce un cambio de registro semiótico también se modifica la representación semiótica, en cambio si se produce un cambio de representación semiótica no necesariamente cambia el registro. Distintas representaciones semióticas de un mismo concepto

---

[7] Oviedo, Lina Mónica, Kanashiro, Ana María. 2012. Los registros semióticos de representación en matemática, Revista Aula Universitaria pág. 29 a 36

Duval, , E.A.F. (2004 Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Editora Moraes. Duval, M.A. (1993). Uma abordagem cognitivista ao ensino da Física. Porto Alegre: Editora da Universidade

4.3. LOS JUEGOS EN EL PROCESO DE LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

No hay diferencia entre jugar y aprender, porque cualquier juego que presente nuevas exigencias al niño(a), se ha de considerar como una oportunidad de aprendizaje; es más, en el juego aprende con una facilidad notable, porque están, especialmente predispuestos para recibir lo que les ofrece la actividad lúdica a la cual se dedican con placer. Además, la atención, la memoria y el ingenio se agudizan en el juego, todos estos aprendizajes, que el niño realiza cuando juega, pueden ser transferidos posteriormente a situaciones no lúdicas.

Groos (2000), plantea la Teoría de la práctica o del pre - ejercicio la cual concibe el juego como un modo de ejercitar o practicar los instintos antes de que éstos estén completamente desarrollados. El juego consistiría en un ejercicio preparatorio para el desarrollo de funciones que son necesarias para la época adulta. El fin del juego es el juego mismo, realizar la actividad que produce placer.

Jean Piaget (1981), destaca como las diversas formas de juego que surgen a lo largo del desarrollo infantil tienen consecuencia directa con las transformaciones que sufren paralelamente las estructuras cognitivas del niño.

Por su parte, Lev S. Vygotsky (1995), propone al juego como una actividad social, en la cual, gracias a la cooperación con otros niños, se logran adquirir papeles o roles que son complementarios al propio, lo que caracteriza fundamentalmente al juego, es que en él se da el inicio del comportamiento conceptual o guiado por las ideas. Subraya que lo fundamental en el juego es la naturaleza social de los papeles representados por el niño, que contribuyen al desarrollo de las funciones psicológicas superiores.

La relación que tiene el juego con el desarrollo del individuo y el aprendizaje es estrecha ya que el juego es un factor importante y potenciador del desarrollo tanto físico como psíquico del ser humano, especialmente en su etapa infantil. El desarrollo infantil está plenamente vinculado con el juego, debido a que además de ser una actividad natural y espontánea a la que el niño y niña le dedica todo el tiempo posible, a través de él, desarrolla su personalidad y habilidades sociales, sus capacidades intelectuales y psicomotoras. En general le proporciona las experiencias que le enseñan a vivir en sociedad, a crecer y madurar.

Chadwick (1990), menciona que mientras más se favorezca la construcción de las nociones lógico – matemáticas, más mejoran la motivación y la calidad del aprendizaje de las matemáticas. Así, los niños aprenden conforme a sus propias actividades. El docente es el encargado de proporcionar instancias educativas que ayude a niños y niñas a pasar del pensamiento intuitivo al operacional.

4.3.1. El juego y la enseñanza de las matemáticas

Es fundamental conocer estrategias que sean atrayentes e innovadoras que estimulen a alumnos y alumnas, ya que de esta forma existirán altos niveles de disposición hacia la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas. En el proceso de adquisición de conceptos se hace necesario innovar en la enseñanza, por esta razón, los juegos pueden ser útiles para presentar contenidos matemáticos, para trabajarlos en clase y para afianzarlos desarrollando la creatividad y habilidades para resolver problemas.

4.3.2. Ventajas de los juegos

Caneo, M. (1987), plantea que la utilización de estas técnicas dentro del aula de clases, desarrolla ciertas ventajas en los niños y niñas, no tan solo concernientes al proceso de cognición de ellos, sino en muchos aspectos más que pueden ser expresados de la siguiente forma:

- Permite romper con la rutina, dejando de lado la enseñanza tradicional, la cual es monótona.
- Desarrollan capacidades en los niños y niñas: ya que mediante los juegos se puede aumentar la disposición al aprendizaje.
- Permiten la socialización; uno de los procesos que los niños y niñas deben trabajar desde el inicio de su educación.
- En lo intelectual - cognitivo fomentan la observación, la atención, las capacidades lógicas, la fantasía, la imaginación, la iniciativa, la investigación científica, los conocimientos, las habilidades, los hábitos, el potencial creador, entre otros.

Todas estas ventajas hacen que los juegos sean herramientas fundamentales para la educación, ya que gracias a su utilización se puede enriquecer el proceso de enseñanza - aprendizaje.

4.3.3. Función del juego matemático

Como se ha mencionado anteriormente, el juego es un recurso didáctico, a través del cual se puede concluir en un aprendizaje significativo para el niño y niña. Esa es su función, pero para que el juego sea realmente efectivo debe cumplir con ciertos principios que garanticen una acción educativa según Caneo,1987, entre ellos podemos destacar:

- El juego debe facilitar reacciones útiles para los niños y niñas, siendo de esta forma sencilla y fácil de comprender.
- Debe provocar el interés de los niños y niñas, por lo que deben ser adecuadas al nivel evolutivo en el que se encuentran.

- Debe ser un agente socializador, en donde se pueda expresar libremente una opinión o idea, sin que el niño(a) tenga miedo a estar equivocado (a).
- Debe adaptarse a las diferencias individuales y al interés y capacidad en conjunto, tomando en cuenta los niveles de cognición que se presentan.
- Debe adaptarse al crecimiento en los niños, por lo tanto, se deben desarrollar juegos de acuerdo a las edades que ellos presentan.
-

4.3.4. El juego y la lógica

La lógica estudia la forma del razonamiento, es una disciplina que por medio de reglas y técnicas determina si un argumento es válido. Es así como se puede utilizar en distintas ramas de la vida cotidiana, en donde el juego cumple una labor fundamental para motivarla. De esta forma, el juego matemático resulta ser el factor de atracción para el niño o niña. Lo invita a investigar, resolver problemas, y en forma implícita lo invita a razonar utilizando solamente su inteligencia y apoyándose de algunos conocimientos acumulados, en donde, se pueden obtener nuevos aprendizajes que se suman a los ya existentes o simplemente, se recurre a la utilización de los mismos.

4.3.5. Ventajas de los materiales manipulativos

Según Galdames y Cols. (1999), los materiales manipulativos favorecen el aprendizaje de los alumnos en aspectos tales como:

- Aprender a relacionarse adecuadamente con los demás.
- Desarrollar procesos de pensamiento.
- Ejercitar ciertos procesos científicos (observar, interpretar modelos, experimentar).
- Aprender a ocupar el tiempo libre.

Para Caneo (1987) a través de la manipulación de materiales didácticos existen niveles de aprendizaje como:

- Nivel activo o de manipulación de los objetos: A través de materiales concretos los niños pueden manipular, tocar y relacionarse con objetos.
- Nivel icónico o representacional: En donde el niño y la niña piensa en los objetos, los dibuja, pero no los manipula.
- Nivel simbólico o formal: El niño y la niña maneja ideas, conceptos y no imágenes.

Por lo tanto, se puede decir que el juego y los materiales manipulativos en las matemáticas, son recursos pedagógicos de gran importancia, debido a que a través de ellos se pueden lograr objetivos matemáticos en el proceso de enseñanza – aprendizaje. De esta forma, deben ser considerados dentro de las estrategias que permiten articular los contenidos que se trabajan en esta área especialmente la factorización, en especial los de mayor complejidad y los que manifiestan un desinterés por parte de los educandos evidenciándose en un bajo rendimiento.

4.4. LA FACTORIZACIÓN

4.4.1. Algebra

Como lo expresa en su Tesis[8] la Lic. Myrian Susana Valencia Cárdenas "El álgebra es la rama de las matemáticas que estudia las estructuras, las relaciones y las cantidades. Es una de las principales ramas de la matemática…" (Valencia 2012); El álgebra es una rama de la matemática que emplea letras, símbolos, signos y números para realizar operaciones aritméticas, muchas veces representando un signo no conocido llamado incógnita. Su técnica nos permite reducir ecuaciones a sus formas más simples.

Su utilidad consiste en:

· Permite la formulación general de leyes de aritmética (como a + b = b + a), y esto es el primer paso para una exploración sistemática de las propiedades de los números reales.

· Permite referirse a números "desconocidos", formular ecuaciones y el estudio de cómo resolverlas.

· Permite la formulación de relaciones funcionales

En matemáticas, una estructura algebraica es un conjunto de elementos con unas propiedades operacionales determinadas; es decir, lo que define a la estructura del conjunto son las operaciones que se pueden realizar con los elementos de dicho conjunto y las propiedades matemáticas que dichas operaciones poseen. Un objeto matemático constituido por un conjunto no vacío y algunas leyes de composición interna definida en él es una estructura algebraica.

En el álgebra se utilizan signos y símbolos -en general utilizados en la teoría de conjuntos que constituyen ecuaciones, matrices, series, etc. Sus letras son llamadas variables, ya que se usa esa misma letra en otros problemas y su valor va variando.

---

[8] TESIS: "Aplicación De La Estrategia Didáctica De Organizadores Gráficos En El Aprendizaje De Productos Notables Y Factorización De Los Estudiantes Del Noveno Año De Educación General Básica Del Colegio Nacional Veracruz Del Cantón Pastaza" Lic. Myrian Susana Valencia Cárdenas Ambato – Ecuador 2012 pág. 50 y 51

Duval, M.A. e Masini, E.A.F. (1982). Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Editora Moraes.
Grooos (2000). Uma abordagem cognitivista ao ensino da Física. Porto Alegre: Editora da Universidade

4.4.2. Utilidad De La Factorización En El Estudiante

· La factorización se emplea en la simplificación de fracciones, en la adición y sustracción de fracciones.

· Se utiliza en la descomposición de fracciones y la descomposición, en integración indefinida.

· En el estudio de cónicas, pues pueden resultar degeneradas o un par de rectas. También en las cuadráticas.

En la solución de ecuaciones diferenciales.

· Quien no factoriza no avanza y para ganar tiempo hay que saber de memoria o tener tablitas auto fabricadas ad hoc. Es bueno ver que los objetos matemáticos son herramientas y con la matemática recreativa son juguetes o divertimentos.

4.4.3. La Factorización Como Objeto Matemático

En matemáticas, la factorización es una técnica que consiste en la descripción de una expresión matemática (que puede ser un número, una suma, una matriz, un polinomio, etc) en forma de producto.

La definición de factorización, presentada por (Álvarez and Mejía, 2006): "Factorizar una expresión algebraica es descomponerla en un producto de factores que deben ser expresiones irreductibles en el conjunto sobre el cual se está factorizando, en este caso, polinomios con coeficientes reales"; otra definición que encontramos es la dada por (Lozano, André, 2007) "Al proceso de expresar un polinomio como un producto de factores se le denomina factorización. El proceso de factorización puede considerarse como inverso al proceso de multiplicar." (Lozano, Andre, 2007); en conclusión, factorizar es expresar una o varias cantidades como el producto de dos o más factores, es decir, identificar los factores comunes a todos los términos y agruparlos; así como los números naturales pueden ser expresados como producto de dos o más números, los polinomios pueden ser expresados como el producto de dos o más factores algebraicos.

Cuando un polinomio no se puede factorizar se denomina irreducible. En los casos en que la expresión es irreducible, solamente puede expresarse como el producto del número 1 por la expresión original como lo define (Álvarez and Mejía, 2006): "Expresión algebraica irreductible: Es aquella expresión que no puede descomponerse como el producto de dos o más expresiones algebraicas de grado mayor que cero en un conjunto dado; en contrario se tiene una expresión algebraica reductible"

(Álvarez and Mejía, 2006) Expresión algebraica, Madrid ed, Zamtrom le frue le bandds

Para poder factorizar expresiones algebraicas, se deben tener en cuenta que el primer paso es identificar el o los casos posibles de factorización, para lo cual debemos tener claro los siguientes conceptos[9]:

· Cualquier expresión que incluya la relación de igualdad (=) se llama ecuación.

· Una ecuación se denomina identidad si la igualdad se cumple para cualquier valor de las variables; si la ecuación se cumple para ciertos valores de las variables, pero no para otros, la ecuación es condicional.

· Un término es una expresión algebraica que sólo contiene productos de constantes y variables; 2x, – a, 3x son algunos ejemplos de términos.

· La parte numérica de un término se denomina coeficiente.

· Los coeficientes de cada uno de los ejemplos anteriores son 2, – 1, y 3.

· Una expresión que contiene un solo término se denomina monomio; si contiene dos términos se llama binomio y si contiene tres términos, es un trinomio.

· Un polinomio es una suma (o diferencia) finita de términos.

· En este contexto, el grado es el mayor exponente de las variables en un polinomio. Por ejemplo, si el mayor exponente de la variable es 3, como en $ax^3 + bx^2 + cx$, el polinomio es de tercer grado.

· Una ecuación lineal en una variable es una ecuación polinómica de primer grado; es decir, una ecuación de la forma $ax + b = 0$.

· Se les llama ecuaciones lineales porque representan la fórmula de una línea recta en la geometría analítica.

· Una ecuación cuadrática en una variable es una ecuación polinómica de segundo grado, es decir, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

· Un número primo es un entero (número natural) que sólo se puede dividir exactamente por sí mismo y por 1. Así, 2, 3, 5, 7, 11 y 13 son todos números primos.

---

[9] 2. TESIS: “Aplicación De La Estrategia Didáctica De Organizadores Gráficos En El Aprendizaje De Productos Notables Y Factorización De Los Estudiantes Del Noveno Año De Educación General Básica Del Colegio Nacional Veracruz Del Cantón Pastaza” Lic. Myrian Susana Valencia Cárdenas Ambato – Ecuador 2012

· Las potencias de un número se obtienen mediante sucesivas multiplicaciones del número por sí mismo. El término a elevado a la tercera potencia, por ejemplo, se puede expresar como $a * a * a$ o $a3$

· Los factores primos de un cierto número son aquellos factores en los que éste se puede descomponer de manera que el número se puede expresar sólo como el producto de números primos y sus potencias.

Los posibles casos de factorización los podemos clasificar de la siguiente forma, de acuerdo al número de términos de la expresión algebraica[10]:

Tabla 4: Casos de factorización

Caso I: Factor Común	**Ejemplos**
Cómo Reconocer: Existe un factor común en todos los términos. Los números pueden factorizarse en este caso si existe máximo común divisor (MCD) entre ellos. **Cómo Factorizar:** Hallar el MCD, tomar las letras comunes con el menor exponente. Abrir paréntesis y dividir cada término entre el factor común (restando los exponentes).	• $ax+bx = x(a+b)$ • $ax^3-bx^2 = x^2(ax-b)$ • $2b^5-b^3 = b^3(2b^2-1)$ • $24ax+18bx = 6x(4a+3b)$ 24 – 18 |2⇐ 12 – 9 |2 6 – 9 |2 MCD = 2 . 3 = 6 3 – 9 |3⇐ 1 – 3 |3 1
Caso I Especial	• $2x(a+1)-3y(a+1) = (a+1)(2x-3y)$
Cómo Reconocer: El factor común es un conjunto entre paréntesis. **Cómo Factorizar:** Tomar el paréntesis común y dividir cada término entre el común	• $a(m-2)-m+2$ $a(m-2)-(m-2) = (m-2)(a-1)$ • $x(a-b)+a-b$ $x(a-b)+(a-b) = (a-b)(x+1)$

[10]Cuadros de casos: tomado de: http://institutowindsor.com/moodle30/pluginfile.php/952/mod_resource/content/1/FACTORIZACION%20casos%20resumen.pdf

Caso II: Factor común por agrupación	• $ax+bx-ay-by = (ax+bx)-(ay+by)$ $= x(a+b) - y(a+b)$ $= (a+b)(x-y)$
Cómo Reconocer: Son cuatro términos, a veces son seis u ocho términos **Cómo Factorizar:** Formar dos grupos y factorizar cada grupo como el caso I y luego el resultado factorizar como el caso I especial.	• $ax^2-x+ax-1 = (ax^2-x)+(ax-1)$ $= x(ax-1) +(ax-1)$ $= (ax-1)(x+1)$
Caso III: Trinomio cuadrado perfecto	• $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$
Cómo Reconocer: Siempre son tres términos. El primero y el tercero siempre son positivos y tienen raíz cuadrada. **Cómo Factorizar:** Sacar raíz cuadrada del primero, signo del segundo y raíz cuadrada del tercero. Asociar entre paréntesis y elevar al cuadrado.	• $x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2$ • $4x^2-12xy+9y^2 = (2x-3y)^2$ prueba: $2(2x)(3y) = 12xy$ • $\frac{x^2}{4} - 5xy^3 + 25y^6 = \left(\frac{x}{2} - 5y^3\right)^2$ prueba : $2\left(\frac{x}{2}\right)(5y^3) = 5xy^3$
Caso III Especial	$(a+1)^2+2(a+1)(2a-3)+(2a-3)^2$
Cómo Reconocer: Son tres términos con paréntesis. El primero y el tercero siempre son positivos y tienen raíz cuadrada. **Cómo Factorizar:** Sacar raíz cuadrada del primero, signo del segundo y raíz cuadrada del tercero. Asociar entre corchetes y elevar al cuadrado	$[(a+1)+(2a-3)]^2$ $[a+1 + 2a-3]^2$ $[3a-2]^2$
Caso IV: Diferencia de cuadrados	• $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Cómo Reconocer: Siempre son dos términos que tienen raíz cuadrada, siempre es una resta **Cómo Factorizar:** Abrir dos pares de paréntesis: uno con menos (-) y el otro con más (+). Sacar raíz cuadrada del primero y del segundo. Repetir lo mismo en los dos paréntesis.	• $4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$ • $\frac{x^2}{25} - \frac{16}{y^6} = \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{y^3}\right)\left(\frac{x}{5} + \frac{4}{y^3}\right)$
Caso IV Especial	• $(a+b)^2 - c^2 = [(a+b)+c][(a+b)-c] = [a+b+c][a+b-c]$
Cómo Reconocer: Uno o los dos términos son conjuntos entre paréntesis y que tienen raíz cuadrada, el signo afuera de los parentesis es menos (-) **Cómo Factorizar:** Abrir dos pares de corchetes, uno con menos [-] y el otro con más [+]. Sacar raíz cuadrada de los dos términos. Repetir lo mismo en los dos corchetes. Eliminar paréntesis y reducir términos semejantes.	• $49(x-1)^2 - 9(3-x)^2$ $[7(x-1) - 3(3-x)]\,[7(x-1) + 3(3-x)]$ $[7x - 7 - 9 + 3x]\ \ [7x - 7 + 9 - 3x]$ $[10x - 16]\ \ [4x + 2]$

Combinación Caso III y IV	Ejemplos
Cómo Reconocer: Son cuatro términos, tres de ellos tienen raíz cuadrada. A veces son seis términos, cuatro de los cuales tienen raíz cuadrada. **Cómo Factorizar:** Cuando son cuatro términos formar un trinomio cuadrado perfecto entre paréntesis y factorizar por el caso III, el resultado factorizar por el caso IV Especial Cuando son seis términos formar dos trinomios cuadrado perfecto y factorizar por el caso III, el resultado factorizar por el caso IV Especial	• $a^2 +2ab + b^2 - c^2 = (a^2 +2ab + b^2) - c^2$ $(a + b)^2 - c^2$ $[(a +b) -c]\,[(a +b) +c]$ $[a + b - c]\ \ [a + b + c]$ • $a^2 - x^2 - 2xy - y^2 = a^2 - (x^2 + 2xy + y^2)$ $= a^2 - (x+y)^2$ $= [a - (x+y)][a + (x+y)]$ $= [a - x - y]\,[a + x + y]$ • $a^2 +2ab + b^2 - x^2 + 2xy - y^2$ $(a^2 +2ab + b^2) - (x^2 - 2xy + y^2)$ $(a + b)^2 - (x - y)^2$ $[(a + b) - (x - y)][(a + b) + (x - y)]$ $[a + b - x + y][a + b + x - y]$

CasoV: Trinomio cuadrado por Adición y Sustracción	• $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$ $\underline{+x^2y^2}$ $= [(x^2 + y^2) - xy]\,[(x^2 + y^2) + xy]$ $+2x^2y^2$ $= [x^2 + y^2 - xy]\,[x^2 + y^2 + xy]$ $= [x^2 - xy + y^2]\,[x^2 + xy + y^2]$ • $25x^4 + 21x^2y^2 + 9y^4 = (5x^2 + 3y^2)^2 - 9x^2y^2$ $\underline{+\ 9x^2y^2}$ $= [(5x^2 + 3y^2) - 3xy]\,[(5x^2 + 3y^2) + 3xy]$ $+\ 30x^2y^2$ $= [5x^2 + 3y^2 - 3xy]\,[5x^2 + 3y^2 + 3xy]$ $= [5x^2 - 3xy + 3y^2]\,[5x^2 + 3xy + 3y^2]$
Cómo Reconocer: Siempre son tres términos. El primero y tercero siempre son positivos, tienen raíz cuadrada y sus exponentes son múltiplos de cuatro (4, 8, 12, etc) **Cómo Factorizar:** Resolver como caso III y restar lo que le falta para ser un trinomio cuadrado perfecto. El resultado factorizar como el caso IV Especial.	
Caso V Especial	• $x^4 + 4y^4$ $(x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2$ $[(x^2 + 2y^2) - 2xy]\ [(x^2 + 2y^2) + 2xy]$ $[x^2 + 2y^2 - 2xy]\ [x^2 + 2y^2 + 2xy]$ $[x^2 - 2xy + 2y^2]\ [x^2 + 2xy + 2y^2]$ • $64x^4 + y^8$ $(8x^2 + y^4)^2 - 16x^2y^4$ $[(8x^2 + y^4) - 4xy^2]\,[(8x^2 + y^4) + 4xy^2]$ $[8x^2 + y^4 - 4xy^2]\,[8x^2 + y^4 + 4xy^2]$ $[8x^2 - 4xy^2 + y^4]\,[8x^2 + 4xy^2 + y^4]$
Cómo Reconocer: Siempre son dos términos positivos que tienen raíz cuadrada y cuyos exponentes son múltiplos de cuatro (4, 8 12, etc) **Cómo Factorizar:** Sacar raíz cuadrada a ambos términos, asociar entre paréntesis y elevar al cuadrado, restar el doble del primero por el segundo y el resultado factorizar por el caso IV Especial	
Caso VI: Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	• $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$ • $x^2 - 7x + 6 = (x - 6)(x - 1)$ • $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$ • $x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$ **Caso VI Especial** • $x^4y^6 - 2x^2y^3 - 15 = (x^2y^3 - 5)(x^2y^3 + 3)$ • $x^2 + 7ax + 12a^2 = (x + 4a)(x + 3a)$ • $(5x)^2 + 4(5x) - 12 = (5x + 6)(5x - 2)$ • $-x^2 + 3x + 28 = -(x^2 - 3x - 28)$ $-(x - 7)(x + 4)$ $(7 - x)(x + 4)$
Cómo Reconocer: Tiene la forma $x^2 + bx + c$ **Cómo Factorizar:** Abrir dos pares de paréntesis, colocar la raíz cuadrada del primero en cada paréntesis; en el primer paréntesis poner el signo del segundo término y en el segundo paréntesis poner la multiplicación de los signos de segundo y tercer término. Si los signos de los paréntesis son iguales, buscar dos números que sumados den el segundo y multiplicado den el tercer término. Si los signos de los paréntesis son opuestos, buscar dos números que restados den el segundo y multiplicados den el tercer término. El número mayor se anota en el primer paréntesis.	

Caso VII: Trinomio de la Forma $ax^2 + bx + c$	Ejemplos
Cómo Reconocer: Tiene la forma $ax^2 + bx + c$ **Aspa Simple:** Descomponer el primer y tercer término en dos factores, multiplicar en diagonal y sumar sus resultados, si la suma da el segundo término, entonces poner cada fila entre paréntesis.	• $10x^2 - 9x + 2 = (5x - 2)(2x - 1)$ $5x \quad -2 = -4x$ $2x \quad -1 = \underline{-5x}$ $-9x$
Otro Método: Abrir dos pares de paréntesis. Colocar el coeficiente del primer término en cada paréntesis y en el denominador. Multiplicar el primer término con el tercero y proseguir como el caso VI, luego simplificar el denominador con los coeficientes de un paréntesis, si sobra algo en el denominador usarlo para simplificar con el otro paréntesis.	• $3x^2 + 5x + 2$ $\dfrac{(\cancel{3}^{1}x + \cancel{3}^{1})(3x+2)}{\cancel{3}_{1}} = (x+3)(3x+2)$ • $6x^2 - 7x - 3$ $\dfrac{(\cancel{6}^{2}x - \cancel{9}^{3})(\cancel{6}^{3}x + \cancel{2}^{1})}{\cancel{6}_{2_1}} = (2x-3)(3x+1)$
Caso VIII: Cubo Perfecto de un Binomio	• $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$
Cómo Reconocer: Siempre son 4 términos, todos positivos o intercalados (+ , - , + , -) y el primer y cuarto término tienen raíz cúbica. **Cómo Factorizar:** Sacar raíz cúbica del primero, poner signo positivo, si todos son positivos, signo negativo, si son intercalados, sacar raíz cúbica del cuarto término, asociar entre paréntesis y elevar al cubo.	• $X^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3$ • $8 + 12a^2 + 6a^4 + a^6 = (2 + a^2)^3$ $prueba \begin{cases} 3(2)^2(a^2) = 12a^2 \\ 3(2)(a^2)^2 = 6a^4 \end{cases}$ • $125a^3 - 150a^2b + 60ab^2 - 8b^3 = (5a - 2b)^3$ $prueba \begin{cases} 3(5a)^2(2b) = 150a^2b \\ 3(5a)(2b)^2 = 60ab^2 \end{cases}$
Caso IX: Suma o Diferencia de Cubos	

Caso IX: Suma o Diferencia de Cubos	
Cómo Reconocer: Siempre son dos términos sumados o restados que tienen raíz cúbica **Cómo Factorizar:** Cuando es una suma ($x^3 + y^3$): Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz cúbica del primero más (+) raíz cúbica del segundo, en el segundo paréntesis: el primero al cuadrado menos (-) el primero por el segundo más (+) el segundo al cuadrado. Cuando es una resta ($x^3 - y^3$): Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz cúbica del primero menos (-) raíz cúbica del segundo, en el segundo paréntesis: el primero al cuadrado más (+) el primero por el segundo más (+) el segundo al cuadrado.	• $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ • $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ • $8x^3 - 125 = (2x - 5)[(2x)^2 + (2x)(5) + (5)^2]$ $= (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$ **Caso IX Especial** • $x^3 + (x - 1)^3 = [x + (x - 1)][x^2 - x(x-1) + (x-1)^2]$ $= (x + x - 1)(x^2 -x^2 +x + x^2 -2x + 1)$ $=(2x - 1)(x^2 - x +1)$ • $(5x - 1)^3 - (2x + 3)^3$ $=[(5x - 1) - (2x + 3)][(5x - 1)^2 + (5x - 1)(2x + 3) +(2x + 3)^2]$ $=[5x -1 - 2x -3][25x^2 -10x+1+10x^2+15x -2x -3+4x^2+12x+9]$ $=(3x - 4)(39x^2 + 15x + 7)$

Caso X: Suma o Diferencia de dos Potencias Iguales	
Cómo Reconocer: Siempre son dos términos sumados o restados que tienen raíz quinta, séptima u otra raíz impar. **Cómo Factorizar:** Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz de ambos términos y en el segundo paréntesis poner un polinomio donde el primer término vaya decreciendo y el segundo término vaya creciendo. Si es una **suma**, el polinomio es de signos intercalados y si es una **resta**, el polinomio es de signos positivos.	• $x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$ • $a^7 - b^7=(a - b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$ • $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ • $1 + x^7 =(1 + x)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6)$ • $x^5 - 32 =(x - 2)(x^4 + x^3.2 + x^2.2^2 + x.2^3 + 2^4)$ $=(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2+ 8x+ 16)$

Revisando los casos de factorización podemos concluir que estos corresponden a los casos de productos notables, este es el nombre que reciben aquellas multiplicaciones con expresiones algebraicas cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, sin verificar la multiplicación que cumplen ciertas reglas fijas. Cada producto notable corresponde a una fórmula de factorización.

4.5. FACTORIZACIÓN Y PRODUCTOS NOTABLES CON CAJA DE POLINOMIOS

Se ha demostrado que un producto notable o algunos casos de factorización, pueden verificarse formando áreas geométricas, permitiendo así la concreción de un aprendizaje significativo.

El objetivo es que cada estudiante tenga en sus manos un grupo de figuras con las especificaciones, lápiz y papel, para verificar teóricamente algunos de los casos de factorización que a continuación se expondrán de acuerdo a esta propuesta

Las características del material son:

- El lado del cuadrado pequeño es uno de los lados del rectángulo.
- La medida del largo de los rectángulos es la mediada del lado del cuadrado grande.
- Los cuadrados pequeños no cubren exactamente los rectángulos.
- Los rectángulos no cubren exactamente los cuadrados grandes.

El material para cada estudiante que se debe recortar es:

- 4 cuadrados color azul de 13cm x 13cm.
- 7 cuadrados color rojo de 8cm x 8cm.
- 4 rectángulos color amarillo de 13cm x 8cm.
- 15 rectángulos color negro de 13cm x 2cm.
- 15 rectángulos color verde de 8cm x 2cm.
- 70 cuadrados color rosa de 2cm x 2cm.

4.5.1. Factor común

Factorización utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación con respecto a la suma. Construyamos un cuadrado de lado x. Es decir, su área es igual a x^2

Ahora un rectángulo de lados x e y, entonces su área es $x.y$, Veamos:

Sumando las áreas anteriores, se obtiene $x^2 + x.\ y$. Representando a través de los bloques queda de la siguiente manera:

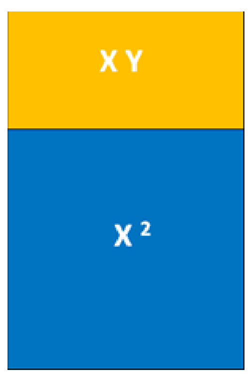
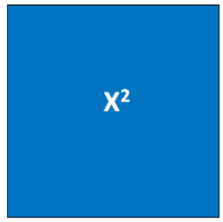


Ilustración 1:Factorización de la expresión x2 + x.y

El área de este rectángulo es $x.(x+y)$, por lo tanto, $x^2 + x.y = x.(x+y)$. Si se observa con detenimiento el lado que es compartido por las dos figuras, determina el factor común entre los dos términos.

Otro ejemplo: Construir un cuadrado de lado x. Su área es x^2



Se grafica un rectángulo de lados x e y. Luego su área es $x.y$

Ahora, superponiendo las dos figuras de tal forma que coincida el lado x

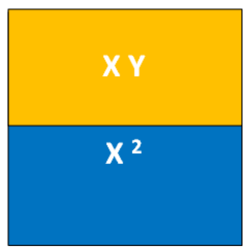


Ilustración 3:Factorización de la expresión x^2-xy

La diferencia de áreas se expresa como x^2 - $x.y$.

Luego se puede concluir que $x^2 - x.y = x.(x-y)$. Observando detenidamente el lado que comparten ambas figuras, es el factor común de ambas expresiones.

4.5.2. Factor común por agrupación

Para Factorizar geométricamente la expresión $x.y$ + 3x + 2y + 6, se construye geométricamente la expresión, así:

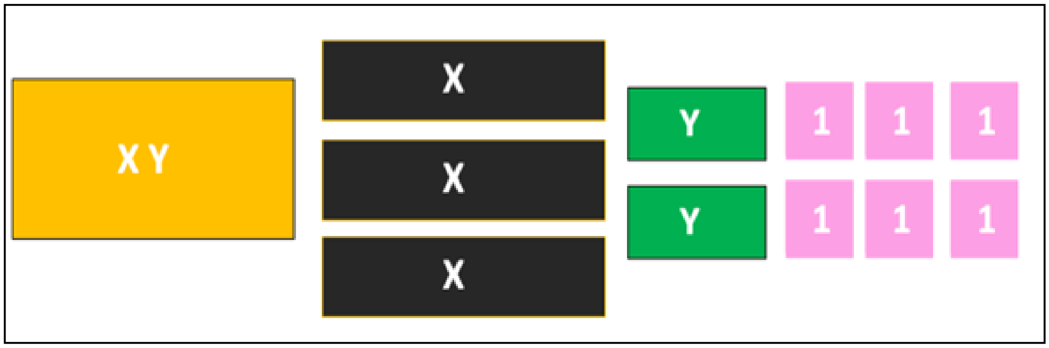


Ilustración 4: Construcción geométrica de la expresión algebraica x.y + 3x + 2y + 6

Agrupando las distintas figuras de tal forma que coincidan sus lados comunes.

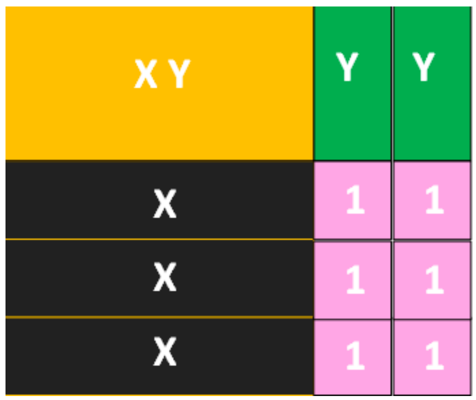


Ilustración 5:Factorización de la expresión x.y + 3x + 2y+ 6

El área de esta figura se puede expresar de dos maneras:

1. Como el área total de un rectángulo de lados $(x+2)$ y $(y+3)$, la cual se expresa como:

$(x+2)(y+3)$

2. Como la suma de dos áreas parciales, una de ellas un rectángulo de lados x, e, $(y+3)$ y la otra, la de un rectángulo de lados *2* y expresión $x.(y+3)+2.(y+3)=(x+2)(y+3)$

Obsérvese que el lado común de las dos áreas parciales es $(y+3)$.

4.5.3. Diferencia de cuadrados

Construir un cuadrado de lado x y otro de lado y, cuya área es x^2 y y^2, respectivamente.

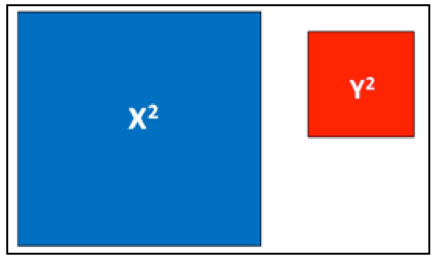


Ilustración 6:Construcción geométrica de la diferencia de cuadrados

En el interior del cuadrado grafiquemos un cuadrado de lado *y*, tal que $y < x$, del cuadrado de lado x removemos el cuadrado de lado y , lo que algebraicamente se expresaría como $x^2 - y^2$

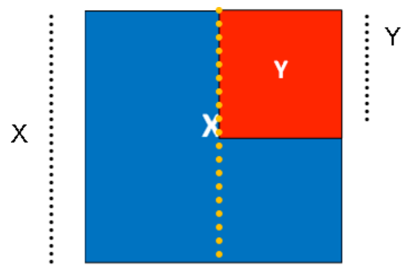


Ilustración 7:Construcción geométrica de la diferencia de cuadrados

Gráfica después de quitar el cuadrado de lado *y:*

Ilustración 8: factorización de la diferencia de cuadrados

Esta figura está formada por dos rectángulos: uno de lados $(x - y)$ y x ; y el otro de lados $(x - y)$ y y . Si sumamos las áreas de estos dos rectángulos, obtenemos la expresión

$x.(x - y) + y.(x - y)$ $x.(x - y) + y.(x - y)$

que es igual a escribir la expresión, $x^2 - y^2$.

Por lo tanto, $x.(x - y) + y.(x - y) = x^2 - y^2$. Otra manera de visualizar el resultado anterior sería trasladando el rectángulo de lados y y de lado $(x - y)$ y x . Veamos $(x - y)$ a la parte superior o inferior del rectángulo

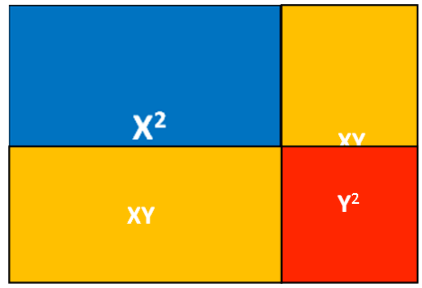


Ilustración 9:Factorización de la expresión x^2 - y^2

Formando dos rectángulos, uno de lados $(x - y)$ y x^2 y el otro de lados $(x - y)$ y y^2

4.5.4. Trinomios cuadrados perfectos

Si se tiene la expresión $(x + 1)^2$ su factorización es $x^2 + 2x + 1$; la solución geométrica este trinomio cuadrado perfecto es:

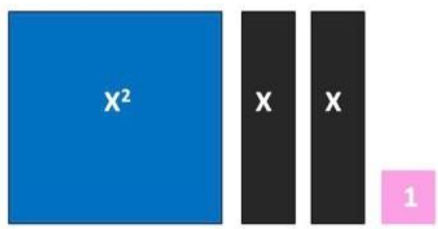


Ilustración 10: Construcción geométrica del Trinomio cuadrado perfecto

Representemos x^2 como un cuadrado del lado x y Representando a x como un rectángulo de lado x y 1 . La unidad como un cuadrado de lado 1.

Luego, para la expresión x^2+2x+1 se organizan estas figuras para obtener el siguiente cuadrado:

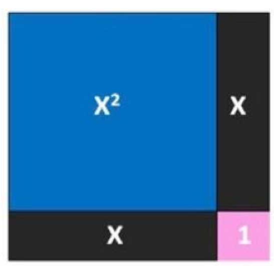


Ilustración 11: : Factorización de la expresión $x^2 + 2x + 1$

Tiene como resultado un cuadrado de lado $(x + 1)$ y su área es $(x+1)^2$

El área de este cuadrado es, $(x+1).(x+1)=(x+1)^{2,}$ luego, $x^2+2x+1=(x+1)^2$

A esta expresión algebraica se le denomina Trinomio Cuadrado Perfecto.

4.5.5. Trinomio de la forma x^2+bx+c

Factoricemos el trinomio $x^2 - 2x - 3$ Representemos los términos de este trinomio de la siguiente manera:

El término x^2 mediante un cuadrado de la x .

El término $2x$ como dos rectángulos de lados x y 1. Las 3 unidades como tres cuadrados de lado 1

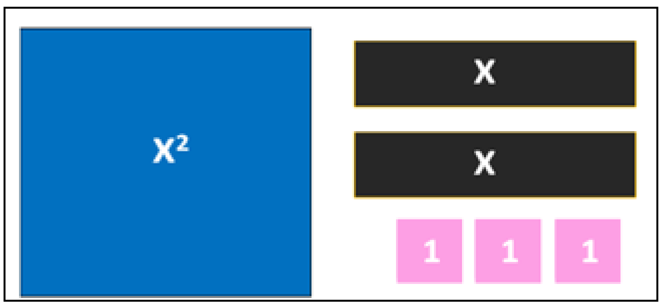


Ilustración 12: Construcción geométrica de trinomio de la forma x^2+bx+c

Representemos ahora, el trinomio $x^2 - 2x - 3$, a través de un rectángulo obtenido de la siguiente forma. Del cuadrado de área x^2 restamos el área de los dos rectángulos de lados 1 y x.

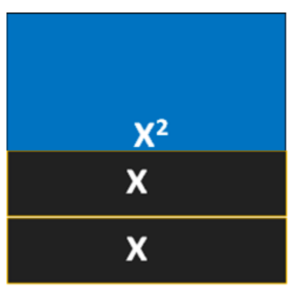


Ilustración 13: factorización de trinomio x^2-2x-3

Pero la operación anterior es equivalente a restar tres de estos rectángulos y adicionar uno de ellos, así:

Ilustración 14:factorización de trinomio x^2-2x-3

Ahora, restamos los 3 cuadrados de lado 1 que se forman al prolongar los tres rectángulos que hemos restado sobre el rectángulo adicionado:

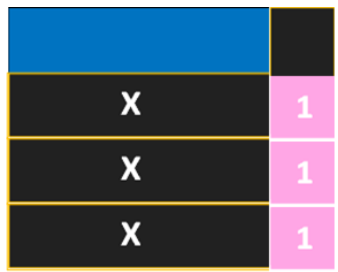


Ilustración 15:: Factorización de la expresión x^2 - 2x -3

El área del rectángulo obtenido (área coloreada de azul) es igual a: $(x+1).(x-3)$.

Luego, $x^2 - 2x + x - x - 3 = (x+1).(x-3)$

Seguidamente, la factorización del trinomio $x^2 + 5x + 6$ y representando gráficamente los términos:

Ilustración 16:: Construcción geométrica de trinomio $x^2 + 5x + 6$

Esta vez, el trinomio $x^2 + 5x + 6$ lo representamos sumando al cuadrado de área x^2 , los cinco rectángulos de lado 1 y x de la siguiente manera:

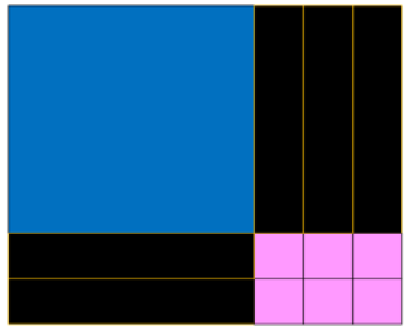


Ilustración 17:Factorización de la expresión $x^2 + 5x + 6$

Finalmente, prolongando los lados de los rectángulos adicionados horizontal y verticalmente, obtenemos los seis cuadrados de lado 1 que también deben ser adicionados.

El área sombreada que hemos obtenido es igual a siguiente $(x+3).(x+2)$ Luego, tenemos: $x^2 + 5x + 6 = (x+3).(x+2)$

4.5.6. Trinomio de la forma: $ax^2 + bx + c$

Factoricemos el trinomio $2x^2 + 5x + 2$ y representemos gráficamente sus términos:

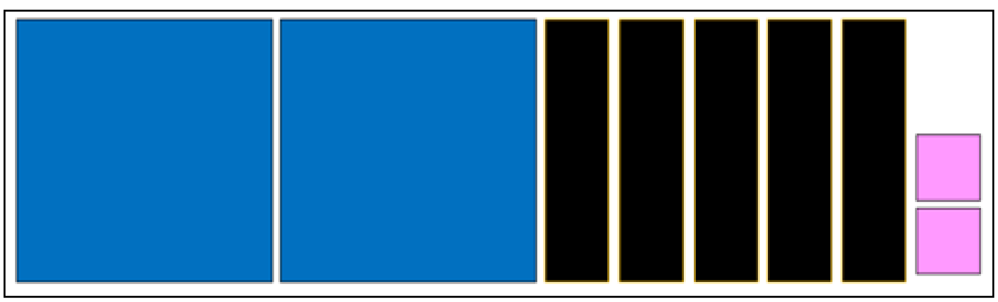
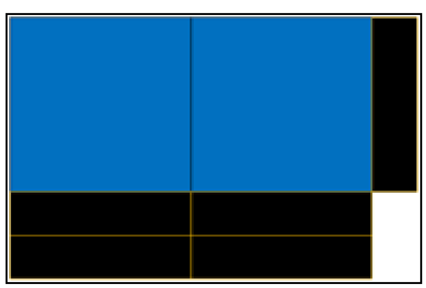


Ilustración 18: Construcción geométrica del Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Representando ahora el trinomio $2x^2 + 5x + 2$. Inicialmente al rectángulo se le suma *2* cuadrados de área x^2 y los cinco rectángulos de lado *1* y x.



Y finalmente, a la figura anterior le adicionamos los dos cuadrados de lado 1:

Ilustración 19:Factorización de la expresión $2x^2 + 5x + 2$

Obtenemos de esta manera un rectángulo de lados $(2x+1)$ y $(x+2)$, cuya área es: $(2x+1).(x+2)$, luego, tenemos: $2x^2 + 5x + 2 = (2x+1).(x+2)$

5. TIPO DE INVESTIGACIÓN

La presente investigación es de carácter explicativa de tipo descriptiva e interpretativa, se efectúa con el objetivo de examinar un tema-problema con comparación de estudios previos, para revelar y obtener un marco teórico que sea de ayuda y ejemplo para orientar procesos nuevos en este tipo de temas con contenido para el aprendizaje.

6. DISEÑO METODOLOGICO

Este proyecto de investigación es de carácter descriptivo y cualitativo, la cual define las características o rasgos de la situación o fenómeno objeto de estudio (BERNAL, 2016), en este caso la Ingeniería Didáctica

Se tendrá como base metodológica la ingeniería didáctica que consta de las siguientes fases las cuales son explicadas por Michèle Artigue: "Delimitaremos en este proceso cuatro fases:

FASE 1: Los análisis preliminares:

Que constan de la profundización en indagar el estado del arte que nos permita:

- Hacer un análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza – aprendizaje de la factorización
- Profundizar en los registros de representación semiótica de la Factorización
- Profundizar en el aprendizaje significativo y su aplicación a la factorización
- Realizar un análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos en los estudiantes de grado 8 y 9

Todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación

FASE 2: La concepción y el análisis a priori:

En esta fase se elaborarán y aplicarán los instrumentos de medición para los estudiantes de 8 y 9 del Instituto Técnico Superior; que sirvan para el desarrollo de la unidad didáctica y permitan la identificación de las dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de la factorización desde los diferentes registros de representación semiótica y el aprendizaje significativo

FASE 3: Experimentación y validación:

En esta fase se diseñarán unidades didácticas con base en los resultados obtenidos y teniendo presente la contextualización del estudiante de grado 8 y 9 del ITS.

La implementación de estas unidades didácticas y la posterior evaluación con la aplicación de los instrumentos de medición para validar la efectividad de dichas metodologías.

FASE 4:

Recomendaciones que apunten a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la Factorización tomando como marcador la capacidad del alumno para identificar y registrar los casos de factorización.

7. POBLACIÓN

El presente trabajo se realiza en el Establecimiento Educativo Instituto Técnico Superior de Pereira, ubicado en el Sector de la Julita, con una población estudiantil de diferentes sectores del área metropolitana comprendida por los municipios de Pereira, Dosquebradas y La Virginia. La Institución Educativa cuenta con una población de 2300 estudiantes y ofrece las especialidades de Autotrónica, Electricidad y electrónica

"*En el Instituto Técnico Superior el proceso educativo se centra en el estudiante, basándose en sus potencialidades, valores, habilidades, intereses, experiencias, estilos de aprendizaje, motivaciones, objetivos, capacidad de participación y resolución de problemas.*"[11]

Este trabajo se realiza con estudiantes de los grados octavos y novenos; con edades entre los 13 y 15 años, de un estrato socioeconómico bajo y medio tipo 1,2,3: Cada grupo con un promedio de 35 estudiantes por grado, y en con 18 grupos en su totalidad.

[11] Instituto Técnico Superior de Pereira, Manual de Convivencia Pág. 4

8. GUÍA DIDÁCTICA

Se propone una guía didáctica que aborda el tema de la factorización en el Instituto Técnico Superior de Pereira grados 8° y 9°, Siguiendo el diseño metodológico y partiendo de la elaboración de un diagnóstico grupal y luego en la etapa motivacional, se elabora el material didáctico a emplear en los diferentes Juegos a implementar realizando adaptaciones a cuatro juegos concretos:

1. Concéntrese
2. Escalera
3. Domino
4. Recurso TIC

Para el desarrollo del tema central de Factorización se utilizó la Caja de Polinomios, como base para el desarrollo de las actividades y la implementación de la guía didáctica, buscando la transición de lo complejo a lo concreto (formación de las áreas geométricas dentro de la resolución de las ecuaciones algebraicas) y finalmente, la comprobación y evaluación de la estrategia.

Para la implementación de la propuesta, se realizaron diferentes actividades, entre ellas están: Desarrollo de talleres tipo diagnóstico, elaboración de material didáctico como por ejemplo rectángulos y cuadrados, adaptación de los juegos tradicionales a juegos matemáticos, elaboración de los juegos y la aplicación de la guía didáctica.

Cada juego busca un objetivo concreto y a su vez cada uno desarrolla una etapa del proceso de aprendizaje, todos los juegos parten de la explicación de los diferentes casos de factorización y de la utilización del material de caja de polinomios, lo cual se desarrolló con base en diferentes trabajos de grado que desarrollaron el tema.

8.1.CAJA DE POLINOMIOS

Para la explicación de los casos de factorización se utilizó como apoyo el trabajo de grado "Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM" de la Mr. Martha Eugenia Ospina Sepúlveda; de la siguiente manera:

El recorte del material se hizo en papel fomi. Cada estudiante tiene su material para resolver los ejercicios propuestos durante la explicación del tema y el desarrollo de los juegos.

Se explica la dinámica de los casos de factorización con una presentación interactiva (ver anexo 3, donde se expone cada caso a la vez que los estudiantes van aprendiendo el uso de las figuras de la caja de polinomios.

8.1.1. Figuras

Las figuras que se recortaron fueron:

4 cuadrados de 13 cm * 13 cm de color azul.

4 cuadrados de 8 cm * 8 cm de color rojo.

4 rectángulos de 13 cm * 8 cm de color amarillo.

15 rectángulos de 13 cm * 2cm de color negro.

15 rectángulos de 8 cm * 2cm de color verde.

70 cuadrados de 2cm * 2cm de color rosado.

Se explica a los estudiantes la manera como se utilizan los rectángulos y cuadrados:

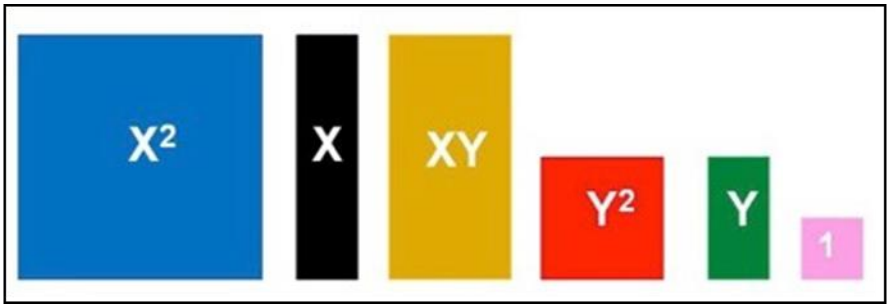


Ilustración 20:Figuras propuestas en la guía didáctica, para el proceso de factorización

Primero se resuelve una expresión algebraica en forma tradicional y luego se pasa a reemplazar cada término por una de las figuras recortadas, así $x^2 + 2x + 1$; esta expresión factorizada es igual a $(x+1)(x+1)$.

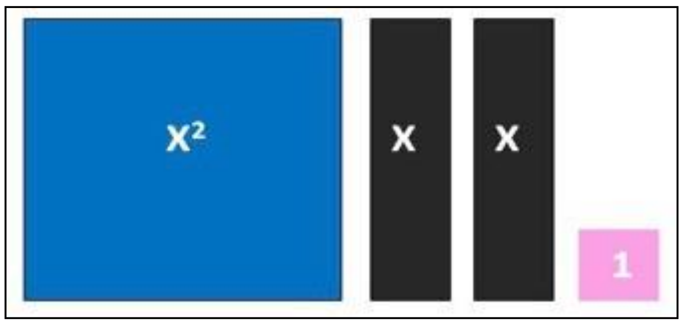


Ilustración 21: construcción de la expresión algebraica x^2+2x+1

Los cuadriláteros utilizados son: $x^2 + 2x + 1$, los cuales se colocan de manera que sus lados coincidan con la medida exacta y siempre se busca formar un cuadrado o un rectángulo.

La figura formada es:

Ilustración 22:La factorización de la expresión $x^2 + 2x + 1$

El profesor hace ejercicios pegando los cuadrados y rectángulos en el tablero y explica el proceso para formar la figura según el caso, teniendo en cuenta el valor que se obtiene en la base y en la altura de ésta, a la vez los estudiantes van siguiendo con su propio material las explicaciones dadas

Las actividades fueron orientadas al trabajo colaborativo, formación en valores y respeto por la diferencia.

Con la aplicación de la Caja de polinomios se demostró que utilizando cuadrados y rectángulos se pueden desarrollar geométricamente expresiones y operaciones algebraicas centrándonos en el proceso de factorización.

Durante la implementación de la Caja de polinomios, se buscó la transición desde lo conceptual a las diferentes Representaciones Geométricas y algebraicas buscando hacer uso de los diferentes registros de representación y finalmente la comprobación y evaluación.

Se aplica la estrategia didáctica con el material elaborado y se emplean los postulados del álgebra geométrica al formar las áreas de los cuadrados y rectángulos expresados en términos de base por altura, comparándolos con la expresión algebraica resuelta.

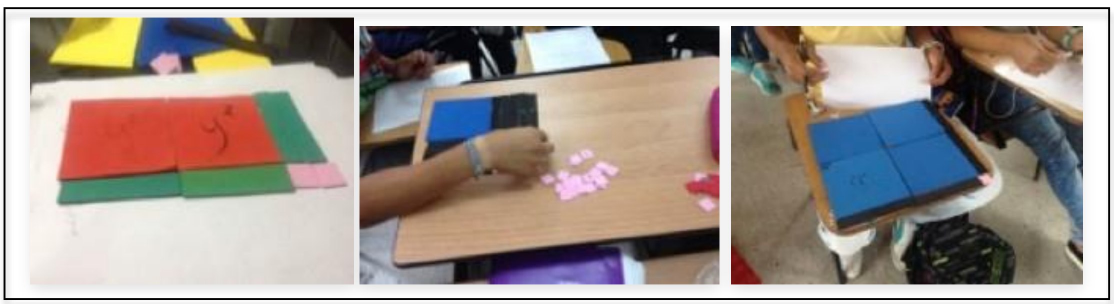


Ilustración 23: Factorizando con el uso de las figuras geométricas

Luego se hace el análisis de las actividades realizadas y se evalúa la estrategia aplicada

9. DESCRIPCIÓN DE LOS JUEGOS

Utilizando los conceptos de aprendizaje significativo de Ausubel, se desarrollaron los diferentes juegos como estrategia didáctica para el aprendizaje de los diferentes casos de factorización; Teniendo en cuenta los planteamientos de la teoría del aprendizaje significativo: "El aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información". Para el aprendizaje de la factorización de una expresión algebraica, el estudiante debía tener unos subsumidores que mediante el proceso de interacción se modificaron para dar paso a la nueva información. (Ausubel, 1983).

Para la implementación y desarrollo de la Guía didáctica se desarrollaron una serie de secuencias didácticas para la implementación de cada juego así:

9.1.SECUENCIA DIDÁCTICA CONCÉNTRESE EN FACTORIZAR

Docente	Lucia Teresa Cardona Herrera
Nombre de la secuencia	Identificación de los tipos de polinomios y casos de factorización aplicar
Juego	CONCENTRECE EN FACTORIZAR
Tiempo	90 minutos
Problema de enseñanza	El reconocimiento de las características del tipo de polinomio que implica dificultades con la utilización de números, letras y signos de operación; Determinar los métodos de factorización y sus procedimientos.
Aforismo	"Las matemáticas son para vivir la vida de manera divertida"
Maestría	Enseñanza de la matemática
IE	Instituto Técnico Superior de Pereira
IES	Universidad Tecnológica de Pereira
Fecha de elaboración	2 abril 2018

Tabla del modelo pedagógico

MATRIZ MODELO PEDAGOGICO		ENFOQUE PEDAGOGICO: SOCIOCONSTRUCTIVISMO			
		Saberes Previos :El sujeto construye la información a partir de lo que ya conoce	Construcción compartida de significados El conocimiento se crea y se construye mutuamente.	Ayuda ajustada. Los estudiantes deben aprender a través de un descubrimiento directo (Guiado no verbal)	Mediación. El docente debe proporcionar el material adecuado para estimular a sus estudiantes mediante estrategias de observación, comparación, análisis de semejanzas y diferencias, etc (andamiaje)
TEORIA DE APRENDIZAJE: APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	Nueva información introducida de forma sustantiva, no arbitraria	X	X	X	X
	Interacción entre los nuevos saberes y los saberes previos		X	X	
	Relación con la experiencia, hechos u objetos	X	X		X
	Actividades que logren despertar el interés del estudiante	X	X	X	X
	Disposición positiva y afectiva al nuevo aprendizaje	X	X	X	X

Teoría didáctica de la enseñanza de la matemática

En el campo de las matemáticas se presentan varias representaciones para un mismo objeto; distinguir la representación del mismo es fundamental para que exista la comprensión del objeto matemático; Duval es uno de los exponentes que pone en evidencia que el aprendizaje de un concepto se realiza en una forma más efectiva si se trabajan diferentes representaciones del mismo.

A continuación, se presentan algunos apartes del artículo Los registros semióticos de representación en matemática de Oviedo, Lina Mónica, Kanashiro, Ana María.

"Según Raymond Duval (2004) el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. Los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática.

En matemática las representaciones semióticas son importantes tanto para los fines de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática. El tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Cuando realizamos cálculos numéricos vemos que existe una dependencia del sistema de escritura elegida: escritura decimal, escritura fraccionaria, escritura binaria, etc. Los tratamientos matemáticos no pueden llevarse a cabo prescindiendo de un sistema semiótico de representación. La función de tratamiento solo la pueden llevar a cabo las representaciones semióticas y no las representaciones mentales. "La utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática y para serle intrínseca" (Duval- 2004). El progreso de los conocimientos va acompañado por la creación y desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que coexisten con el primero de ellos, este es, la lengua natural.

La noética es la adquisición, por parte del estudiante, del concepto matemático; la semiótica es el recurso de representación del concepto, las representaciones semióticas son todos los signos o gráficos que permiten a un individuo interactuar con el concepto del objeto y este puede darse en múltiples sistemas de representación. En general cada concepto matemático no es un objeto real por lo que está obligado a utilizar representaciones de distinta naturaleza.

Según Duval (1993) la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes: el uso de más de un registro de representación semiótica, la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos se constituye en símbolo de progreso de conocimiento.
Según Duval (1998), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:
1) La presencia de una representación identificable.
2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada...
3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial
Si se produce un cambio de registro semiótico también se modifica la representación semiótica, en cambio si se produce un cambio de representación semiótica no necesariamente cambia el registro. Distintas representaciones semióticas de un mismo concepto.

Inicio

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
1	15´	Introducir el tema de factorización como un repaso de los temas vistos desde los diferentes métodos de factorización para distintos polinomios.	Tablero ó presentación visual

Desarrollo

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
2	20´	Entregar la guía de como reconocer y como factorizar Conformar equipos de 5 estudiantes para el desarrollo del juego, cada equipo nombra un líder y juntos repasan la guía.	Guía de como reconocer y como factorizar
3	40´	Se retira la guía a cada equipo y se ubica en el tablero las fichas del juego, boca abajo. Previamente se debe haber elaborado un tablero con 3 columnas así: **CASO** **COMO RECONOCER** **COMO FACTORIZAR**	Tablero de casos de factorización Fichas del concéntrese Ver anexo 1

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
		Factor Común Factor Común Por Agrupación Trinomio cuadrado perfecto Diferencia de cuadrados Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ Trinomio de la Forma (caso 1) $ax^2 + bx + c$ Trinomio de la Forma (caso 2) $ax^2 + bx + c$ Cubo Perfecto de un Binomio Suma o Diferencia de Cubos Suma o Diferencia de dos Potencias Iguales cada grupo dispone de lápiz y papel y la guía para determinar qué caso de factorización es; Se inicia la ronda el primer grupo destapa la primera ficha; destapa la segunda y el grupo	

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
		cuenta con 1 minuto para determinar si son pareja o no y ubicar en las casillas correspondientes. Si aciertan tienen punto y pueden repetir, de lo contrario las fichas se ubican nuevamente donde y como estaban; el segundo grupo tiene el turno y repite el procedimiento hasta que todas las fichas quedan ubicadas y descubiertas. Al final gana el equipo que más parejas haya conseguido.	

Final

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
4	15´	Se hace un repaso con lo construido en el tablero y se despejan dudas entre todos bajo la supervisión del docente. Se da cierre a la actividad determinando los puntos de cada equipo y repasando las aplicaciones vistas durante el juego. Se entrega a cada estudiante una guía para finalizar.	Guía para cada estudiante

Guía de como reconocer y como factorizar

CASO	COMO RECONOCER	COMO FACTORIZAR
FACTOR COMUN	Existe un factor común en todos los términos. Los números pueden factorizarse en este caso si existe máximo común divisor (MCD) entre ellos.	Hallar el MCD, tomar las letras comunes con el menor exponente. Abrir paréntesis y dividir cada término entre el factor común (restando los exponentes)
FACTOR COMUN POR AGRUPACION	El factor común es un conjunto entre paréntesis.	Tomar el paréntesis común y dividir cada término entre el común

CASO	COMO RECONOCER	COMO FACTORIZAR
Trinomio cuadrado perfecto	Siempre son tres términos. El primero y el tercero siempre son positivos y tienen raíz cuadrada	Sacar raíz cuadrada del primero, signo del segundo y raíz cuadrada del tercero. Asociar entre paréntesis y elevar al cuadrado
Diferencia de cuadrados	Siempre son dos términos que tienen raíz cuadrada, siempre es una resta	Abrir dos pares de paréntesis: uno con menos (-) y el otro con más (+). Sacar raíz cuadrada del primero y del segundo. Repetir lo mismo en los dos paréntesis.
Trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$	Tiene la forma $x^2 + bx + c$	Abrir dos pares de paréntesis, colocar la raíz cuadrada del primero en cada paréntesis; en el primer paréntesis poner el signo del segundo término y en el segundo paréntesis poner la multiplicación de los signos de segundo y tercer término. Si los signos de los paréntesis son iguales, buscar dos números que sumados den el segundo y multiplicado den el tercer término. Si los signos de los paréntesis son opuestos, buscar dos números que restados den el segundo y multiplicados den el tercer término. El número mayor se anota en el primer paréntesis.
Trinomio de la Forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$	Tiene la forma $ax^2 + bx + c$	Descomponer el primer y tercer término en dos factores, multiplicar en diagonal y sumar sus resultados, si la suma da el segundo término, entonces poner cada fila entre paréntesis.
Trinomio de la Forma	Tiene la forma $ax^2 + bx + c$	Abrir dos pares de paréntesis. Colocar el coeficiente del primer término en cada

CASO	COMO RECONOCER	COMO FACTORIZAR
$\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$		paréntesis y en el denominador. Multiplicar el primer término con el tercero y proseguir como el caso VI, luego simplificar el denominador con los coeficientes de un paréntesis, si sobra algo en el denominador usarlo para simplificar con el otro paréntesis.
Cubo Perfecto de un Binomio	Siempre son 4 términos, todos positivos o intercalados (+ , - , + , -) y el primer y cuarto término tienen raíz cúbica.	Sacar raíz cúbica del primero, poner signo positivo si todos son positivos, signo negativo, si son intercalados, sacar raíz cúbica del cuarto término, asociar entre paréntesis y elevar al cubo.
Suma o Diferencia de Cubos	Siempre son dos términos sumados o restados que tienen raíz cúbica	Cuando es una suma (x3 + y3): Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz cúbica del primero más (+) raíz cúbica del segundo, en el segundo paréntesis: el primero al cuadrado menos (-) el primero por el segundo más (+) el segundo al cuadrado. Cuando es una resta (x3 - y 3): Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz cúbica del primero menos (-) raíz cúbica del segundo, en el segundo paréntesis: el primero al cuadrado más (+) el primero por el segundo más (+) el segundo al cuadrado.
Suma o Diferencia de dos Pot encias Iguales	Siempre son dos términos sumados o restados que tienen raíz quinta, séptima u otra raíz impar.	Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz de ambos términos y en el segundo paréntesis poner un polinomio donde el primer término vaya decreciendo y el segundo término vaya creciendo. Si es una suma, el polinomio es de signos intercalados y si es una resta, el polinomio es de signos positivos.

9.2.SECUENCIA DIDÁCTICA: BUSCA E IDENTIFICA EL CASO DE FACTORIZACIÓN

Docente	Lucia Teresa Cardona Herrera
Nombre de la secuencia	Identificando los casos de factorización
Nombre del Juego	Busca e identifica La factorización
Tiempo	90 minutos
Problema de enseñanza	El reconocimiento del tipo de polinomio que implica dificultades con la utilización de números, letras y signos de operación; la utilización de los métodos de factorización para saber cuál de ellos utilizar en determinado momento.
Aforismo	"Las matemáticas son para vivir la vida de manera divertida"
Maestría	Enseñanza de la matemática
IE	Instituto Técnico Superior de Pereira
IES	Universidad Tecnológica de Pereira
Fecha de elaboración	9/05/17 9:33 A.M.

Tabla del modelo pedagógico

MATRIZ MODELO PEDAGOGICO		ENFOQUE PEDAGOGICO: SOCIOCONSTRUCTIVISMO			
		Saberes Previos :El sujeto construye la información a partir de lo que ya conoce	Construcción compartida de significados El conocimiento se crea y se construye mutuamente.	Ayuda ajustada. Los estudiantes deben aprender a través de un descubrimiento directo (Guiado no verbal)	Mediación. El docente debe proporcionar el material adecuado para estimular a sus estudiantes mediante estrategias de observación, comparación, análisis de semejanzas y diferencias, etc (andamiaje)
TEORIA DE APRENDIZAJE: APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	Nueva información introducida de forma sustantiva, no arbitraria	X	X	X	X
	Interacción entre los nuevos saberes y los saberes previos		X	X	
	Relación con la experiencia, hechos u objetos	X	X		X
	Actividades que logren despertar el interés del estudiante	X	X	X	X
	Disposición positiva y afectiva al nuevo aprendizaje	X	X	X	X

Teoría didáctica de la enseñanza de la matemática

En el campo de las matemáticas se presentan varias representaciones para un mismo objeto; distinguir la representación del mismo es fundamental para que exista la comprensión del objeto matemático; Duval es uno de los exponentes que pone en evidencia que el aprendizaje de un concepto se realiza en una forma más efectiva si se trabajan diferentes representaciones del mismo.

A continuación, se presentan algunos apartes del artículo Los registros semióticos de representación en matemática de Oviedo, Lina Mónica, Kanashiro, Ana María.

"Según Raymond Duval (2004) el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. Los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática.

En matemática las representaciones semióticas son importantes tanto para los fines de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática. El tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Cuando realizamos cálculos numéricos vemos que existe una dependencia del sistema de escritura elegida: escritura decimal, escritura fraccionaria, escritura binaria, etc. Los tratamientos matemáticos no pueden llevarse a cabo prescindiendo de un sistema semiótico de representación. La función de tratamiento solo la pueden llevar a cabo las representaciones semióticas y no las representaciones mentales. "La utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática y para serle intrínseca" (Duval- 2004). El progreso de los conocimientos va acompañado por la creación y desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que coexisten con el primero de ellos, este es, la lengua natural.

La noética es la adquisición, por parte del estudiante, del concepto matemático; la semiótica es el recurso de representación del concepto, las representaciones semióticas son todos los signos o gráficos que permiten a un individuo interactuar con el concepto del objeto y este puede darse en múltiples sistemas de representación. En general cada concepto matemático no es un objeto real por lo que está obligado a utilizar representaciones de distinta naturaleza.

Según Duval (1993) la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes: el uso de más de un registro de representación

semiótica, la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos se constituye en símbolo de progreso de conocimiento.
Según Duval (1998), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:
1) La presencia de una representación identificable.
2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada...
3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial
Si se produce un cambio de registro semiótico también se modifica la representación semiótica, en cambio si se produce un cambio de representación semiótica no necesariamente cambia el registro. Distintas representaciones semióticas de un mismo concepto.

Inicio

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
1	10´	Haga un repaso rápido sobre lo visto en las clases anteriores y refuerce los casos de factorización más importantes.	TV o Video Bean con sonido Computador
2	10´	Presentar el tema a desarrollar con el video de como reconocer los casos de factorización, link: https://www.youtube.com/watch?v=xplSPYWxWQs	Acceso a internet o el video

Desarrollo

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
2	15´	Después de visto el video reforzar en el tablero y entregar la guía de los casos de factorización con sus características	Juego en power point Ver anexo 2
3	45´	Conformar equipos de 5 estudiantes para el desarrollo del juego, cada equipo nombra un líder quien debe correr al centro del salón para tocar la campana o timbre antes que los otros grupos cuando tengan la respuesta; se proyecta en la pantalla el primer polinomio a factorizar; cada grupo dispone de lápiz y papel y la guía para	TV o Video Bean Computador

determinar que caso de factorización es; el primer líder de equipo en tocar la campana o timbre dá la respuesta la cual es señalada con el cursor en el juego. si acierta suma un punto a su equipo, sino otro líder puede dar la respuesta. Al final gana el equipo que más puntos halla conseguido.

Final

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
4	10´	Se da cierre a la actividad determinando los puntos de cada equipo y repasando las aplicaciones vistas durante el juego	

9.3.SECUENCIA DIDÁCTICA: ESCALERA Y LISADERO QUE FACTORIZA

Docente	Lucia Teresa Cardona Herrera
Nombre de la secuencia	Conceptos y Factorizaciones a través de caja de polinomios.
Juego	ESCALERA GEOMETRICA QUE FACTORIZA
Tiempo	120 Minutos
Problema de enseñanza	Estudio de los conceptos en el proceso de factorización y de productos notables; Determinar los métodos de factorización y sus procedimientos a través de la caja de polinomios
Aforismo	“Las matemáticas son para vivir la vida de manera divertida”
Maestría	Enseñanza de la matemática
IE	Instituto Técnico Superior de Pereira
IES	Universidad Tecnológica de Pereira
Fecha de elaboración	2 abril 2018

Tabla del modelo pedagógico

MATRIZ MODELO PEDAGOGICO		ENFOQUE PEDAGOGICO: SOCIOCONSTRUCTIVISMO			
		Saberes Previos :El sujeto construye la información a partir de lo que ya conoce	Construcción compartida de significados El conocimiento se crea y se construye mutuamente.	Ayuda ajustada. Los estudiantes deben aprender a través de un descubrimiento directo (Guiado no verbal)	Mediación. El docente debe proporcionar el material adecuado para estimular a sus estudiantes mediante estrategias de observación, comparación, análisis de semejanzas y diferencias, etc (andamiaje)
TEORIA DE APRENDIZAJE: APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	Nueva información introducida de forma sustantiva, no arbitraria	X	X	X	X
	Interacción entre los nuevos saberes y los saberes previos		X	X	
	Relación con la experiencia, hechos u objetos	X	X		X
	Actividades que logren despertar el interés del estudiante	X	X	X	X
	Disposición positiva y afectiva al nuevo aprendizaje	X	X	X	X

Teoría didáctica de la enseñanza de la matemática

En el campo de las matemáticas se presentan varias representaciones para un mismo objeto; distinguir la representación del mismo es fundamental para que exista la comprensión del objeto matemático; Duval es uno de los exponentes que pone en evidencia que el aprendizaje de un concepto se realiza en una forma más efectiva si se trabajan diferentes representaciones del mismo.

A continuación, se presentan algunos apartes del artículo Los registros semióticos de representación en matemática de Oviedo, Lina Mónica, Kanashiro, Ana María.

"Según Raymond Duval (2004) el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. Los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática.

En matemática las representaciones semióticas son importantes tanto para los fines de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática. El tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Cuando realizamos cálculos numéricos vemos que existe una dependencia del sistema de escritura elegida: escritura decimal, escritura fraccionaria, escritura binaria, etc. Los tratamientos matemáticos no pueden llevarse a cabo prescindiendo de un sistema semiótico de representación. La función de tratamiento solo la pueden llevar a cabo las representaciones semióticas y no las representaciones mentales. "La utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática y para serle intrínseca" (Duval- 2004). El progreso de los conocimientos va acompañado por la creación y desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que coexisten con el primero de ellos, este es, la lengua natural.

La noética es la adquisición, por parte del estudiante, del concepto matemático; la semiótica es el recurso de representación del concepto, las representaciones semióticas son todos los signos o gráficos que permiten a un individuo interactuar con el concepto del objeto y este puede darse en múltiples sistemas de representación. En general cada concepto matemático no es un objeto real por lo que está obligado a utilizar representaciones de distinta naturaleza.

Según Duval (1993) la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes: el uso de más de un registro de representación

semiótica, la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos se constituye en símbolo de progreso de conocimiento.
Según Duval (1998), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:
1) La presencia de una representación identificable.
2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada...
3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial
Si se produce un cambio de registro semiótico también se modifica la representación semiótica, en cambio si se produce un cambio de representación semiótica no necesariamente cambia el registro. Distintas representaciones semióticas de un mismo concepto.

Inicio

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
1	80´	Previamente se debe haber solicitado a cada estudiante construir las fichas de la caja de polinomios. Se explica con ayuda de la presentación como funciona caja de polinomios (anexo XXX) con cada caso de factorización, haciendo un ejemplo	presentación de Power Point (anexo 3) y fichas de caja de polinomios para cada estudiante

Desarrollo

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
2	50´	Los jugadores se organizarán por grupos de 3 a 5, cada grupo comienzan con una ficha que avanzará sobre las casillas del tablero, los grupos se turnan para lanzar un dado que les indicará la cantidad de Las fichas se mueven según la numeración del tablero, en sentido ascendente. El jugador que logra llegar a la casilla final es el ganador. Las indicaciones del juego son las siguientes:	Tablero de escalera Dado numérico de 1 a 6 fotografía en (anexo 4)

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
		Comprende el objetivo del juego. El objetivo del juego es ser el primer jugador en llegar hasta el final moviéndote a través del tablero desde el cuadro inicial al cuadro final. Sigue los números en el tablero para ver hacia dónde moverte. Por ejemplo, si te salió un 5 en los dados y estás en el número 11, entonces mueve tu ficha al número 16. **Decide quién va a empezar.** Cada jugador debe tirar un dado para ver quién obtiene el número más alto. Quién saque el número más alto tendrá el primer turno. Después del turno del primero jugador, la persona que está a la izquierda es la siguiente y así hasta completar el círculo; Si dos o más personas tiran el mismo número y es el número más alto, esas personas deben de tirar el dado una vez más para ver quién va primero **Tira el dado y mueve tu ficha.** Para tomar tu turno, vuelve a tirar el dado y lee el número que cayó. Toma tu ficha y muévete por el tablero la cantidad de espacios. Por ejemplo, si cayó un dos, mueve tu ficha hacia el cuadro número 2. En tu próximo turno, si te cae un 5, mueve tu ficha 5 espacios hacia adelante, terminando en el cuadro número 7. **Cuando caigas en la casilla algebraica.** Estas casillas obligan a que cumplas con una prueba para lo cual, debes lanzar el dado de color y según el color que saques debes tomar una tarjeta de dicho color y resolver lo planteado para poder continuar, así: NARANJA: CAJA MAGIGA: Con la caja de polinomios resuelve los problemas algebraicos. VERDE: STAR ESTELAR: Actúa tararea y libera el actor ROJO: DATONAUTA: lo que sabes, sabes, lo que no lo inventas, Explica el concepto AMARILLO: PENSAR ES GRATIS: resuelve el anagrama y piensa acierta (encuentra la respuesta correcta) MORADO ESCOGE CULQUIER CARTA	Dado de colores fotografía en (anexo 4) Tarjetas de colores con las pruebas fotografía en (anexo 4) Fichas de caja de polinomios fotografía en (anexo 4) Hojas para desarrollar los ejercicios

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
		Sube por las escaleras y no bajes por el tobogán. Las escaleras en el tablero te permiten subir para avanzar con más rapidez y el tobogán te devuelve y te hace el camino más lento. Si caes en un cuadro que muestra la imagen del inicio de la escalera, o el inicio del tobogán que esté en color morado, deberás escoger una de las tarjetas de tu preferencia, si la resuelves subes la escalera o evitas bajar el tobogán, en caso contrario no podrás subir la escalera y de castigo tendrás que bajar el tobogán. **Tienes que caer exactamente en el último cuadro para ganar.** La primera persona que llegue al último cuadro del tablero (el número 100), gana. Pero hay una regla que dice que, si el dado cae en un número muy alto, tu ficha salta al último cuadro y luego "rebota" hacia atrás. Solo puedes ganar si cae el número exacto que necesitas para caer en el último cuadro; Por ejemplo, si estás en el cuadro 99 y te toca un 4, debes mover tu ficha al número 100 (un espacio hacia adelante) y después brincas hacia atrás, hacia el 99, el 98 y al 97 (dos, tres y cuatro movimientos). Si el cuadro 97 es la base de una escalera o la cola de una serpiente, tienes que subir o bajar dependiendo de qué te toca	

Final

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
4	30´	Se despejan las dudas y se plantea cada ejercicio en el tablero y su correspondiente desarrollo construido con los estudiantes.	Ejercicios desarrollados por los estudiantes durante el juego

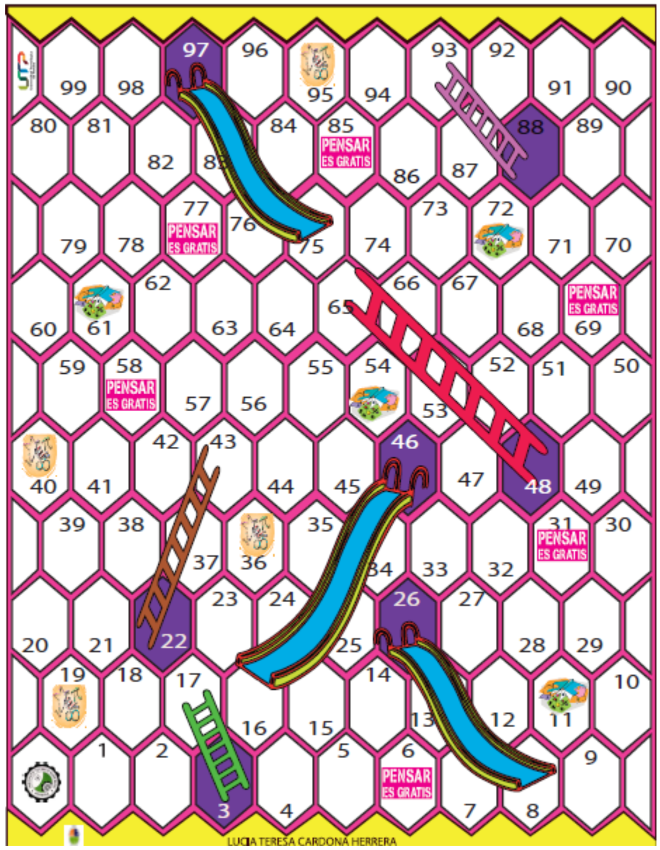


Ilustración 24: Tablero Juego Escaleras y Lisaderos

Ilustración 25: Estudiantes factorizando con el juego Escalera y Lisaderos

9.4.SECUENCIA DIDÁCTICA FACTORIZANDO DOMINO

Docente	Lucia Teresa Cardona Herrera
Nombre de la secuencia	Secuencia del proceso de factorización con algunos casos
Juego	FACTORIZANDO DOMINO
Tiempo	90 minutos
Problema de enseñanza	El reconocimiento del tipo de polinomio que implica dificultades con la utilización de números, letras y signos de operación; Determinar los pasos generales y aplicados en la factorización
Aforismo	"Las matemáticas son para vivir la vida de manera divertida"
Maestría	Enseñanza de la matemática
IE	Instituto Técnico Superior de Pereira
IES	Universidad Tecnológica de Pereira
Fecha de elaboración	2 Marzo 2018

Tabla del modelo pedagógico

MATRIZ MODELO PEDAGOGICO		ENFOQUE PEDAGOGICO: SOCIOCONSTRUCTIVISMO			
		Saberes Previos :El sujeto construye la información a partir de lo que ya conoce	Construcción compartida de significados El conocimiento se crea y se construye mutuamente.	Ayuda ajustada. Los estudiantes deben aprender a través de un descubrimiento directo (Guiado no verbal)	Mediación. El docente debe proporcionar el material adecuado para estimular a sus estudiantes mediante estrategias de observación, comparación, análisis de semejanzas y diferencias, etc (andamiaje)
TEORIA DE APRENDIZAJE: APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	Nueva información introducida de forma sustantiva, no arbitraria	X	X	X	X
	Interacción entre los nuevos saberes y los saberes previos		X	X	
	Relación con la experiencia, hechos u objetos	X	X		X
	Actividades que logren despertar el interés del estudiante	X	X	X	X
	Disposición positiva y afectiva al nuevo aprendizaje	X	X	X	X

Teoría didáctica de la enseñanza de la matemática

En el campo de las matemáticas se presentan varias representaciones para un mismo objeto; distinguir la representación del mismo es fundamental para que exista la comprensión del objeto matemático; Duval es uno de los exponentes que pone en evidencia que el aprendizaje de un concepto se realiza en una forma más efectiva si se trabajan diferentes representaciones del mismo.

A continuación, se presentan algunos apartes del artículo Los registros semióticos de representación en matemática de Oviedo, Lina Mónica, Kanashiro, Ana María.

"Según Raymond Duval (2004) el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. Los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática.

En matemática las representaciones semióticas son importantes tanto para los fines de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática. El tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Cuando realizamos cálculos numéricos vemos que existe una dependencia del sistema de escritura elegida: escritura decimal, escritura fraccionaria, escritura binaria, etc. Los tratamientos matemáticos no pueden llevarse a cabo prescindiendo de un sistema semiótico de representación. La función de tratamiento solo la pueden llevar a cabo las representaciones semióticas y no las representaciones mentales. "La utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática y para serle intrínseca" (Duval- 2004). El progreso de los conocimientos va acompañado por la creación y desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que coexisten con el primero de ellos, este es, la lengua natural.

La noética es la adquisición, por parte del estudiante, del concepto matemático; la semiótica es el recurso de representación del concepto, las representaciones semióticas son todos los signos o gráficos que permiten a un individuo interactuar con el concepto del objeto y este puede darse en múltiples sistemas de representación. En general cada concepto matemático no es un objeto real por lo que está obligado a utilizar representaciones de distinta naturaleza.

Según Duval (1993) la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes: el uso de más de un registro de representación semiótica, la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos se constituye en símbolo de progreso de conocimiento.

Según Duval (1998), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:

1) La presencia de una representación identificable.

2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada...

3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial

Si se produce un cambio de registro semiótico también se modifica la representación semiótica, en cambio si se produce un cambio de representación semiótica no necesariamente cambia el registro. Distintas representaciones semióticas de un mismo concepto.

Inicio

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
1	15´	Se repasa los diferentes casos de factorización a través de la guía de como reconocer y como factorizar ó a través del video “como reconocer los casos de factorización” https://www.youtube.com/watch?v=xplSPYWxWQs Un poco de historia: El **dominó** puede considerarse como una extensión de los dados, aunque su origen se supone oriental y antiquísimo no parece que la forma actual fuese conocida en Europa hasta mediados del siglo XVIII, cuando lo introdujeron los italianos.	Video bean Computador Video o tablero

Previamente el estudiante debe conocer la metodología de caja de polinomios para utilizarla en el desarrollo del juego lo cual es opcional.

Desarrollo

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
2	15´	Entregar la guía de como reconocer y como factorizar Conforman grupos de 10 estudiantes para el desarrollo del juego a quienes se les entrega un juego factorizando domino, se subdivide el grupo por parejas quienes serán los jugadores.	Guía de como reconocer y como factorizar Anexo 1
3	50´	Las fichas del domino se ubican boca abajo en el piso y se revuelven tal cual como un domino, se toman 7 fichas por pareja, la ficha que inicia es la de par “factorización” y desde esta pareja inician a la derecha a ubicar la ficha que tenga en un lado la palabra factorización y en el otro un caso, lo cual dá inicio al juego como proceso de aprendizaje. Cada pareja cuenta con hojas, lápiz y la guía con el fin de que desarrollen el juego realizando las operaciones respectivas según se acomodan las fichas. En caso que los estudiantes no encuentren la ficha correspondiente podrán orientarse por las figuras geométricas ubicadas en cada lado del domino. Gana quien haga la mayor cantidad de procedimientos con las fichas y quede con la menor cantidad de fichas en caso de cerrarse el juego.	Domino de factorización Ver anexo 3 de fichas para impresión Hojas y lápices Guía para el docente del desarrollo del domino

Final

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
4	10´	Se revisan los procedimientos de cada pareja desarrollados en sus hojas y se despejan dudas entre todos bajo la supervisión del docente.	

		Se da cierre a la actividad.	Tablero para explicar

El juego está diseñado de la siguiente manera para armar las parejas de fichas:

Ilustración 26: Fichas dominó factor común por agrupación

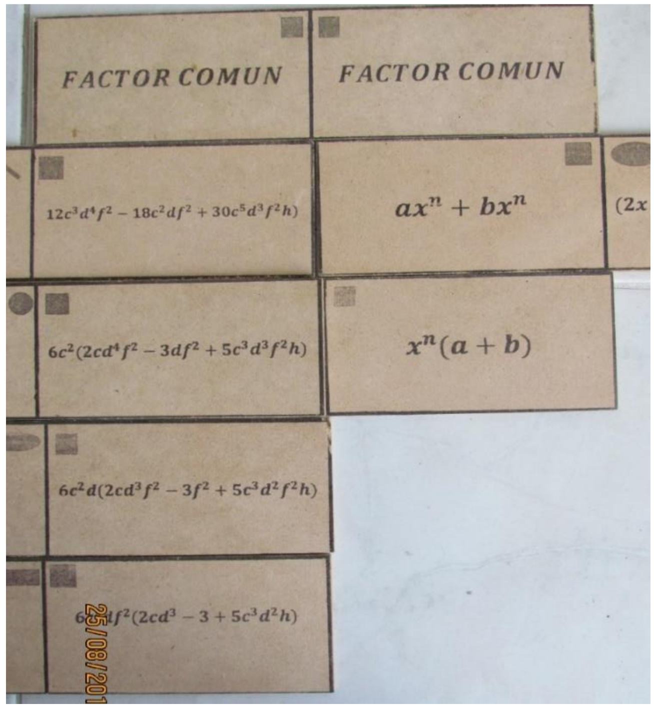


Ilustración 27: Fichas dominó factor común

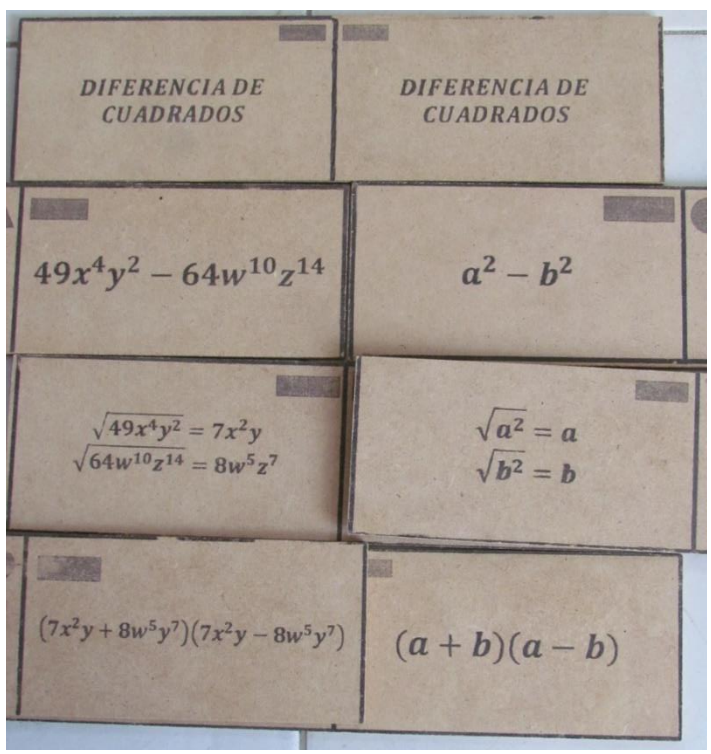


Ilustración 28: Fichas dominó diferencia de cuadrados

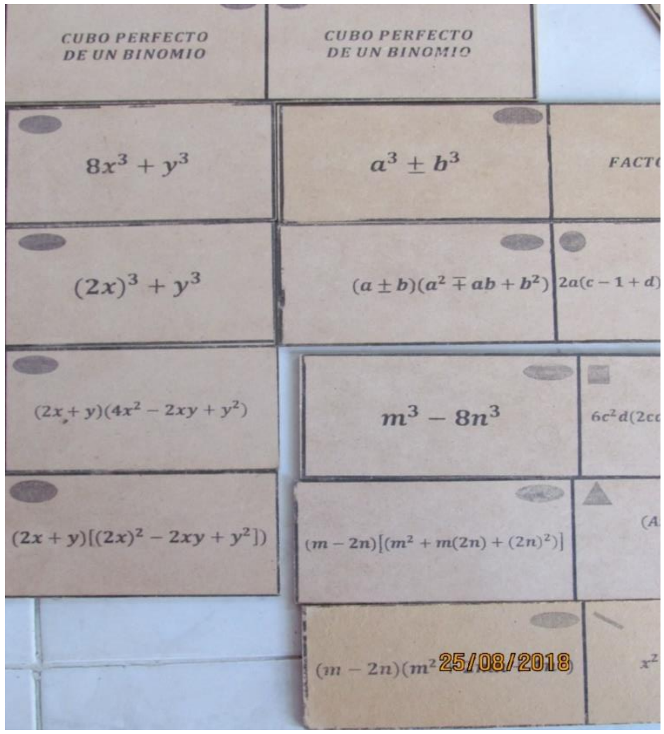


Ilustración 29: Fichas dominó cubo perfecto de un binomio

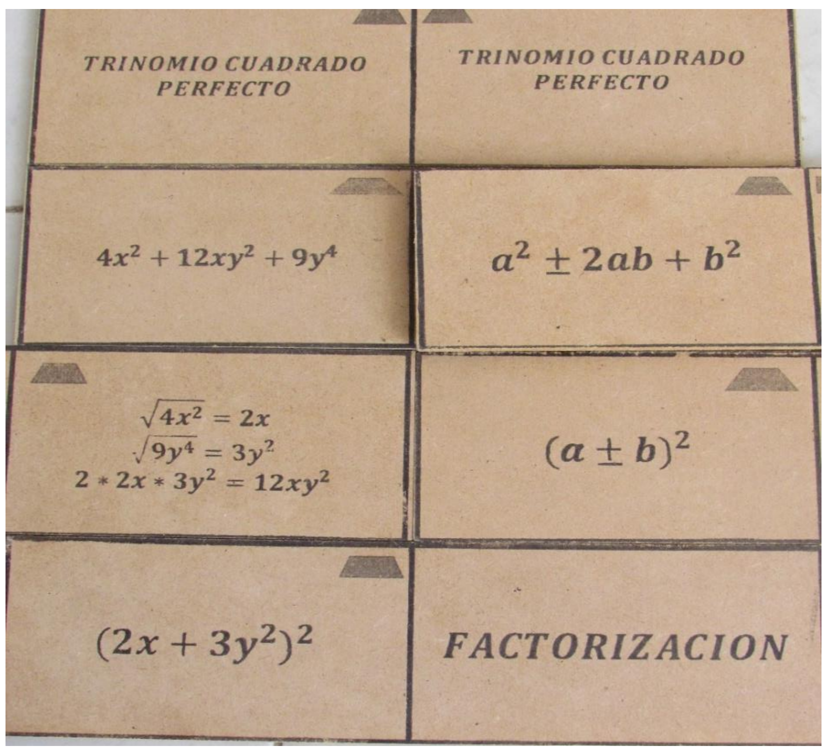


Ilustración 30:: Fichas dominó cubo perfecto del Trinomio Cuadrado Perfecto

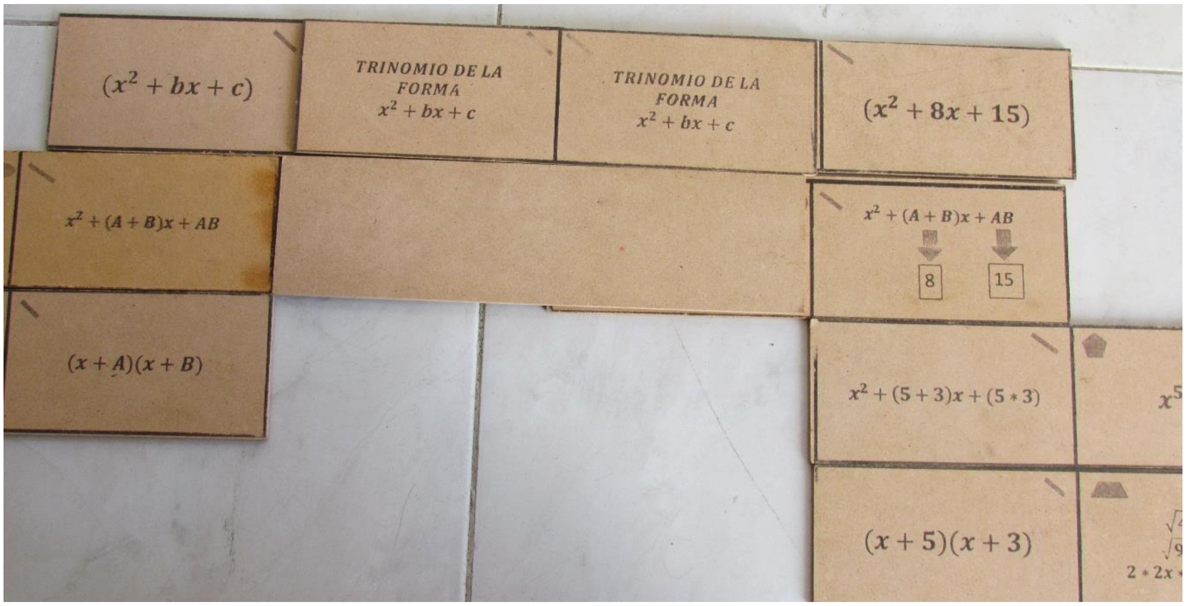


Ilustración 31: Fichas dominó Trinomio de la forma x^2+bx+c

Ilustración 32: Fichas dominó Cubo Perfecto de un Binomio

10. INSTRUMENTOS DE RECOLECCION DE INFORMACION

10.1. COMO RECONOCER LOS CASOS Y FACTORIZARLOS

Tabla 5: COMO RECONOCER LOS CASOS Y FACTORIZARLOS

CASO	COMO RECONOCER	COMO FACTORIZAR
FACTOR COMUN	Existe un factor común en todos los términos. Los números pueden factorizarse en este caso si existe máximo común divisor (MCD) entre ellos.	Hallar el MCD, tomar las letras comunes con el menor exponente. Abrir paréntesis y dividir cada término entre el factor común (restando los exponentes)
FACTOR COMUN POR AGRUPACION	El factor común es un conjunto entre paréntesis.	Tomar el paréntesis común y dividir cada término entre el común
TRINOMIO CUADRADO PERFECTO	Siempre son tres términos. El primero y el tercero siempre son positivos y tienen raíz cuadrada	Sacar raíz cuadrada del primero, signo del segundo y raíz cuadrada del tercero. Asociar entre paréntesis y elevar al cuadrado
DIFERENCIA DE CUADRADOS	Siempre son dos términos que tienen raíz cuadrada, siempre es una resta	Abrir dos pares de paréntesis: uno con menos (-) y el otro con más (+). Sacar raíz cuadrada del primero y del segundo. Repetir lo mismo en los dos paréntesis.
TRINOMIO DE LA FORMA $\boldsymbol{x^2+bx+c}$	Tiene la forma x^2+bx+c	Abrir dos pares de paréntesis, colocar la raíz cuadrada del primero en cada paréntesis; en el primer paréntesis poner el signo del segundo término y en el segundo paréntesis poner la multiplicación

CASO	COMO RECONOCER	COMO FACTORIZAR
		de los signos de segundo y tercer término. Si los signos de los paréntesis son iguales, buscar dos números que sumados den el segundo y multiplicado den el tercer término. Si los signos de los paréntesis son opuestos, buscar dos números que restados den el segundo y multiplicados den el tercer término. El número mayor se anota en el primer paréntesis.
TRINOMIO DE LA FORMA $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$	Tiene la forma ax^2+bx+c	Descomponer el primer y tercer término en dos factores, multiplicar en diagonal y sumar sus resultados, si la suma da el segundo término, entonces poner cada fila entre paréntesis.
TRINOMIO DE LA FORMA $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$	Tiene la forma ax^2+bx+c	Abrir dos pares de paréntesis. Colocar el coeficiente del primer término en cada paréntesis y en el denominador. Multiplicar el primer término con el tercero y proseguir como el caso VI, luego simplificar el denominador con los coeficientes de un paréntesis, si sobra algo en el denominador usarlo para simplificar con el otro paréntesis.
CUBO PERFECTO DE UN BINOMIO	Siempre son 4 términos, todos positivos o intercalados (+ , - , + , -) y el primer y cuarto término tienen raíz cúbica.	Sacar raíz cúbica del primero, poner signo positivo si todos son positivos, signo negativo, si son intercalados, sacar raíz cúbica del cuarto término, asociar entre paréntesis y elevar al cubo.

CASO	COMO RECONOCER	COMO FACTORIZAR
SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS	Siempre son dos términos sumados o restados que tienen raíz cúbica	Cuando es una suma (x3 + y3): Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz cúbica del primero más (+) raíz cúbica del segundo, en el segundo paréntesis: el primero al cuadrado menos (-) el primero por el segundo más (+) el segundo al cuadrado. Cuando es una resta (x3 - y 3): Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz cúbica del primero menos (-) raíz cúbica del segundo, en el segundo paréntesis: el primero al cuadrado más (+) el primero por el segundo más (+) el segundo al cuadrado.
SUMA O DIFERENCIA DE DOS POTENCIAS IGUALES	Siempre son dos términos sumados o restados que tienen raíz quinta, séptima u otra raíz impar.	Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz de ambos términos y en el segundo paréntesis poner un polinomio donde el primer término vaya decreciendo y el segundo término vaya creciendo. Si es una suma, el polinomio es de signos intercalados y si es una resta, el polinomio es de signos positivos.

10.2. FICHAS DEL DOMINO CON LOS CASOS

Ilustración 33: Fichas del Dominó

FACTORIZACION	***FACTORIZACION***

$(2ac - 2a + 2ad) - (5bc - 5b + 5bd)$	$(7x^2y + 8w^5y^7)(7x^2y - 8w^5y^7)$

$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$	$2a(c - 1 + d) - (5bc - 5b + 5bd)$

$2a(c - 1 + d) - 5b(c - 1 + d)$	$(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

$a^3 \pm b^3$	***FACTORIZACION***

$(2x + \_\_\_\_)(x + \_\_)$ ó $(-2x + \_\_\_\_)(-x + \_\_)$	$(x + A)(x + B)$
$m^3 - 8n^3$	$6c^2d(2cd^3f^2 - 3f^2 + 5c^3d^2f^2h)$
$(a \pm b)^2$	$(2x)^3 + y^3$
$(x + 5)(x + 3)$	$\sqrt{4x^2} = 2x$ $\sqrt{9y^4} = 3y^2$ $2 * 2x * 3y^2 = 12xy^2$
$x^2 + (5 + 3)x + (5 * 3)$	$x^5 + y^5$

$(m-2n)(m^2+2mn+4n^2)$	$x^2+(A+B)x+AB$

(x^2+bx+c)	$12c^3d^4f^2-18c^2df^2+30c^5d^3f^2h)$

$\sqrt{a^2}=a$ $\sqrt{b^2}=b$	$(x^2+8x+15)$

$\sqrt{49x^4y^2}=7x^2y$ $\sqrt{64w^{10}z^{14}}=8w^5z^7$	$6c^2df^2(2cd^3-3+5c^3d^2h)$
$(2x+3)(x+1)$	$6c^2d(2cd^3f^2-3f^2+5c^3d^2f^2h)$

$px + mx + py + my$	$x^2 + \underbrace{(A + B)}_{\boxed{8}}x + \underbrace{AB}_{\boxed{15}}$
$ax^n + bx^n$	$(2x + y)[(2x)^2 - 2xy + y^2]$
$ax^2 + bx + c$	$49x^4y^2 - 64w^{10}z^{14}$
$a^2 - b^2$	$(c - 1 + d)(2a - 5b)$
$(m - 2n)[(m^2 + m(2n) + (2n)^2)]$	$(Ax + B)(Cx + D)$ $A * C = a$ $B * D = c$
$4x^2 + 12xy^2 + 9y^4$	$x^n(a + b)$

$b = A + B$ $c = A * B$	$8x^3 + y^3$
$a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a+b)(a-b)$
FACTORIZACION	$(px + mx) + (py + my)$
FACTOR COMUN POR AGRUPACION	***FACTOR COMUN POR AGRUPACION***
TRINOMIO CUADRADO PERFECTO	***TRINOMIO CUADRADO PERFECTO***
CUBO PERFECTO DE UN BINOMIO	***CUBO PERFECTO DE UN BINOMIO***

TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$	***TRINOMIO DE LA FORMA*** $ax^2 + bx + c$
TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$	***TRINOMIO DE LA FORMA*** $x^2 + bx + c$
$(2x + 3y^2)^2$	***FACTORIZACION***
$(p + m)(x + y)$	$6c^2(2cd^4f^2 - 3df^2 + 5c^3d^3f^2h)$
$(x + y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$	$2ac - 5bd - 2a + 2ad + 5b - 5bc$
$x(p + m) + y(p + m))$	$2x^2 + 5x + 3$

FACTOR COMUN	***FACTOR COMUN***
SUMA DE DOS POTENCIAS IGUALES	***SUMA DE DOS POTENCIAS IGUALES***
DIFERENCIA DE CUADRADOS	***DIFERENCIA DE CUADRADOS***

Se adjunta en el anexo 5 fotografías de las actividades realizadas con los estudiantes a lo largo de la aplicación de las secuencias didácticas

10.3. ENCUESTA APLICADA SOBRE JUEGOS DE FACTORIZACION

Alumno ____ Grado _______________

1. ¿Se le dificulta factorizar? sí _____ No _____

¿Por qué? ____

2. ¿Cree usted que por medio de los juegos aprendidos mejoro el conocimiento para desarrollar los diferentes casos de factorización?

Sí ____ No _____

3. ¿Realiza en menos tiempo los casos de factor común y por agrupación por medio del concéntrese?

Sí ____ No _____

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y desarrolle procedimientos?

a) $(x + 18)\ (x - 10)\ =\ X^2 +\ 8X\ - 180$ ______________________________
b) $(a + b)^2\ =\ a^2\ +\ b^2$ ___________________________________
c) $(a + b)(a - b)\ =\ a^2\ +\ b^2$ ____________________________________

5. factorizar las siguientes expresiones en términos de base por altura y verificar que

figura se forma utilizando Caja de Polinomios (a = x; b = y)

a) $a^2 - 2ab + b^2$
b) $10x^2+5x+20x$

6. ¿Considera el método tradicional para aprender a factorizar mejor que el método con los juegos?

Sí ____ No _____

7. ¿Cuál de los siguientes juegos le facilita identificar los diferentes métodos de factorización?

Domino ________ Concéntrese _______ Escalera _______ Juego de Recurso TIC _____

¿Por qué? ____

11. ANALISIS E INTERPRETACION DE DATOS ESTADISTICOS DE LA ENCUESTA APLICADA

Se realizó una muestra con 24 estudiantes de los diferentes grados de 8 y 9 a quienes se les aplicó la encuesta, se adjunta en el anexo 6 la tabulación; y se realizaron con ellos las diferentes actividades de las secuencias didácticas propuestas arrojando los siguientes resultados:

PREGUNTA 1: SE LE DIFICULTA FACTORIZAR?		
Respuestas	***Frecuencia***	***Porcentajes***
SI	10	41,7%
NO	14	58,3%
TOTAL	24	100,0%

Tabla 6: Frecuencia pregunta 1 Se le dificulta factorizar

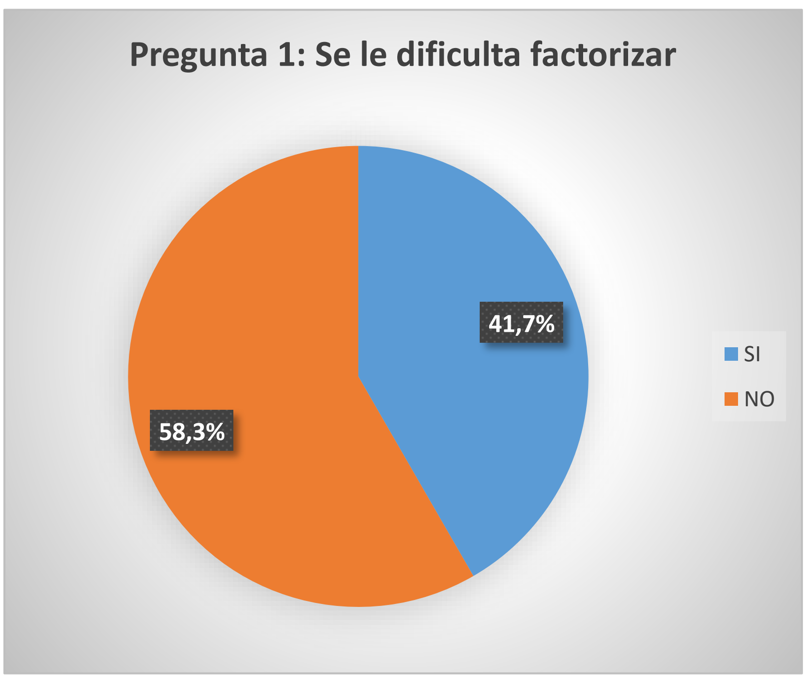


Ilustración 34: diagrama circular de pregunta 1 Se le dificulta factorizar

PREGUNTA 1 B: PORQUE		
Respuestas	***Frecuencia***	***Porcentaje***
Confunde los casos de factorización	5	20,8%
no maneja bien los conceptos	3	12,5%
No recuerda todos los casos	4	16,7%
No presentan inconvenientes	12	50,0%
Total	24	100%

Tabla 7: : frecuencia pregunta 1 b. Porque se dificulta factorizar

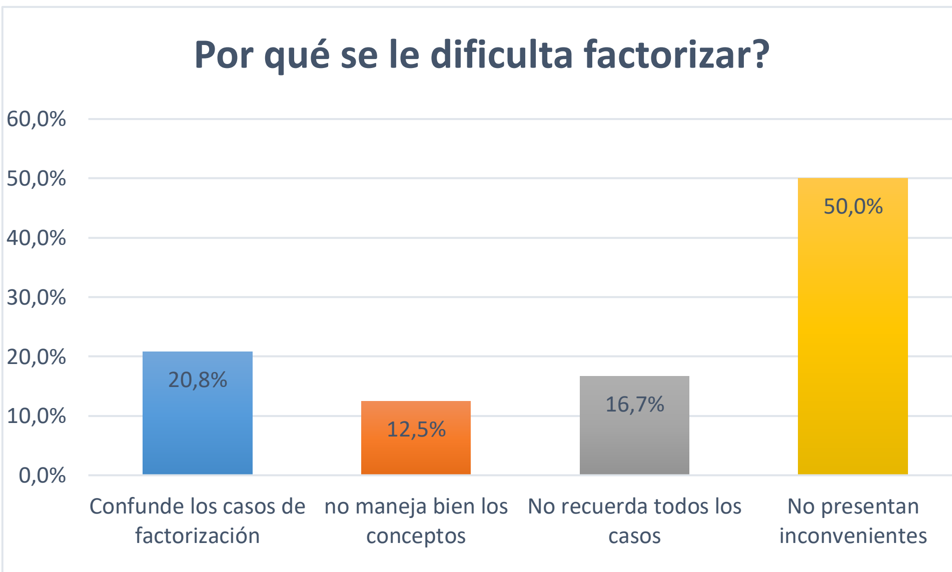


Ilustración 35:Diagrama de barras pregunta 1 b. Porque se dificulta factorizar

CONCLUSION: De la pregunta 1 se puede concluir que el 41,7% de los estudiantes manifiesta tener dificultades para factorizar mientras el 58,3% manifiestan no presentar dificultades, sin embargo en las dificultades que expresan tener; el 50% de los estudiantes que participaron no manifiestan presentar dificultades para factorizar, la mayor dificultad manifestada por los estudiantes al empezar este proceso, fue con un 20,8% de estudiantes, confunden los casos de factorización, seguido del 16,7% que no manejan bien los conceptos para aplicar los casos y por último con un 12,5 % no recuerdan todos los casos.

PREGUNTA 2: ¿cree usted que por medio de los juegos aprendidos mejoro el conocimiento para desarrollar los diferentes casos de factorización?		
Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
SI	24	100,0%
NO	0	0
TOTAL	24	100%

Tabla 8: Frecuencia pregunta 2: ¿cree usted que por medio de los juegos aprendidos mejoro el conocimiento para desarrollar los diferentes casos de factorización?

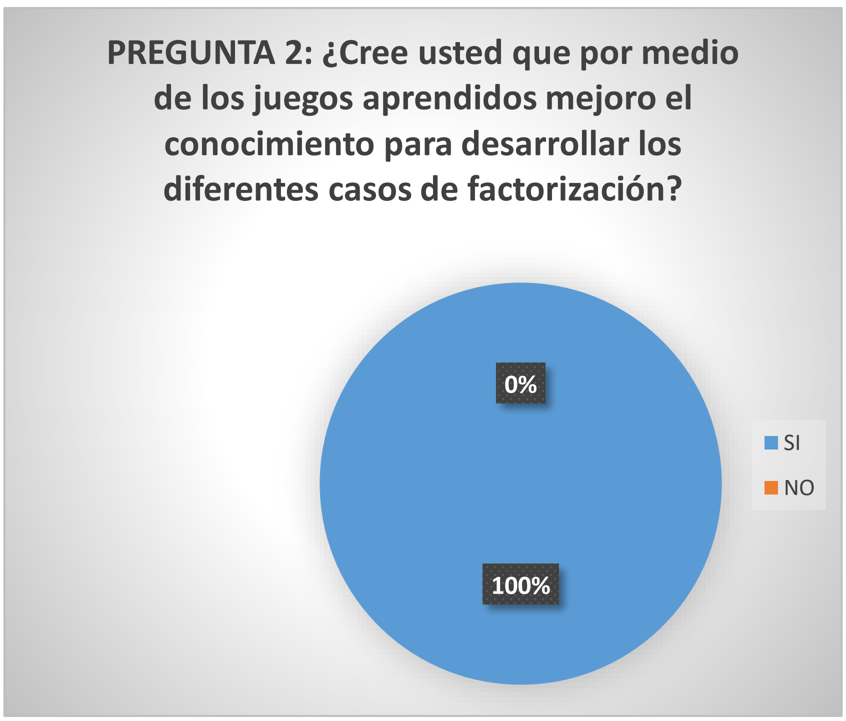


Ilustración 36: Grafico circular pregunta 2: ¿cree usted que por medio de los juegos aprendidos mejoro el conocimiento para desarrollar los diferentes casos de factorización?

CONCLUSION: El 100% de los estudiantes que participaron manifestaron que a través de los juegos aprendidos mejoraron sus conocimientos para desarrollar los procesos de factorización.

PREGUNTA 3: ¿Realiza en menos tiempo los casos de factor común y por agrupación por medio del concéntrese?		
Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
SI	20	83,3%
NO	2	8,3%
NO CONTESTA	2	8,3%
TOTAL	24	100,0%

Tabla 9: Frecuencia pregunta 3: ¿Realiza en menos tiempo los casos de factor común y por agrupación por medio del concéntrese?

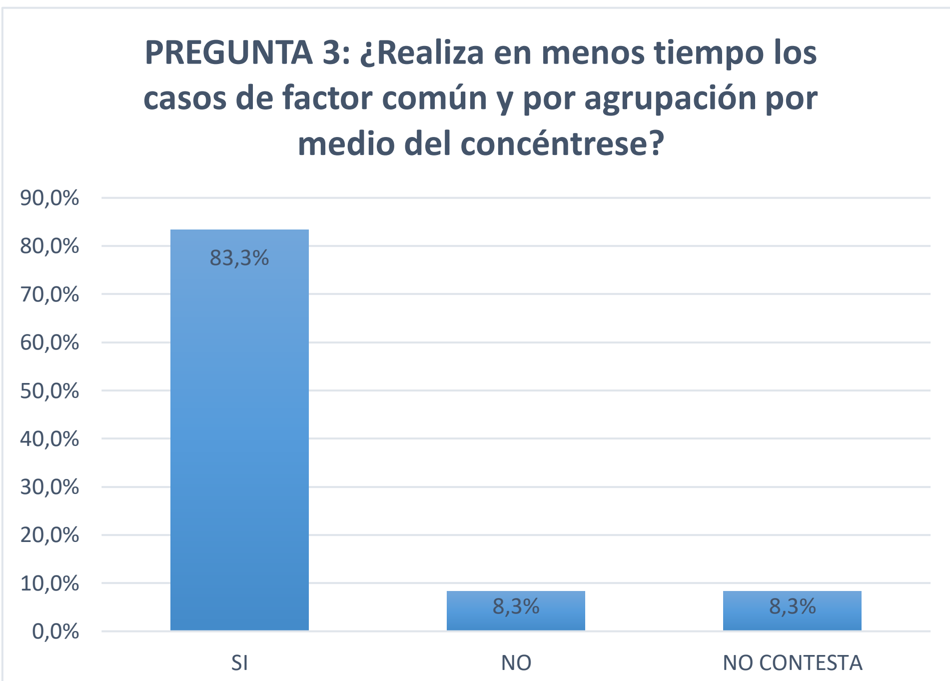


Ilustración 37: Diagrama de barras pregunta 3: ¿Realiza en menos tiempo los casos de factor común y por agrupación por medio del concéntrese?

CONCLUSION: El 83,3% de los estudiantes manifestaron que el juego concéntrese les ayudo para realizar en menos tiempo las factorizaciones que tenían que ver con factor común, el 8,3% manifestaron que no y el otro 8,3 % no contestaron la pregunta.

PREGUNTA 4: CUÁL DE LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES SON FALSAS O VERDADERAS Y DESARROLLE PROCEDIMIENTOS

PREGUNTA 4 a. Resuelve correctamente
(x+18) (x-10) = X ^{2} + 8X -180

Respuestas	**Porcentaje**	**Frecuencia**
CORRECTO	95,8%	23
INCORRECTO	0,0%	0
NO RESOLVIO	4,2%	1
TOTAL	100,0%	24

Tabla 10: Frecuencia Resuelve correctamente PREGUNTA 4 a. (x+18) (x-10) = X ^{2} + 8X -180

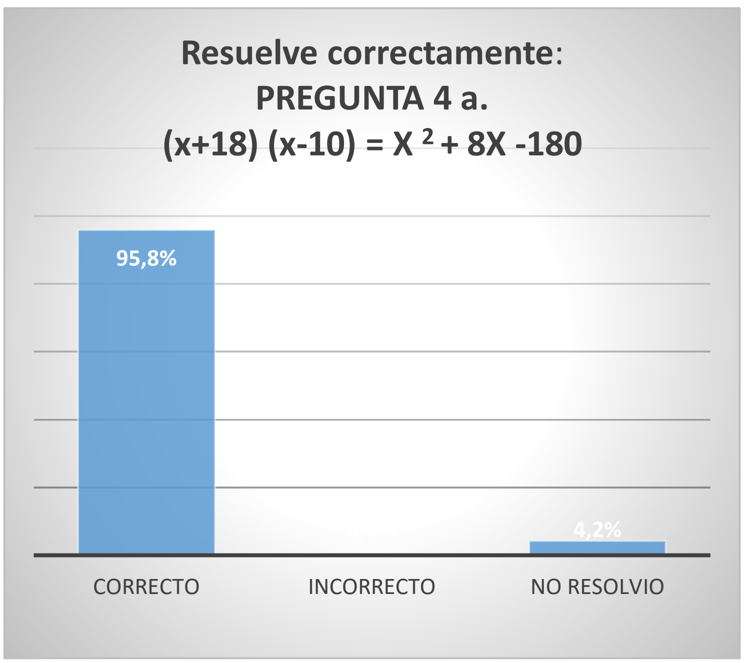


Ilustración 38:Diagrama de barras Resuelve correctamente ***PREGUNTA 4 a. (x+18) (x-10) = X ^{2} + 8X -180****:*

CONCLUSION: El 95,8% de los estudiantes identificó y respondió correctamente el ejercicio, el 4,2% restante no resolvió el ejercicio

PREGUNTA 4b.: Resuelve correctamente: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$		
respuestas	Porcentaje	Frecuencia
CORRECTO	62,5%	15
INCORRECTO	37,5%	9
TOTAL	100,0%	24

Tabla 11: Frecuencia PREGUNTA 4b.: Resuelve correctamente: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

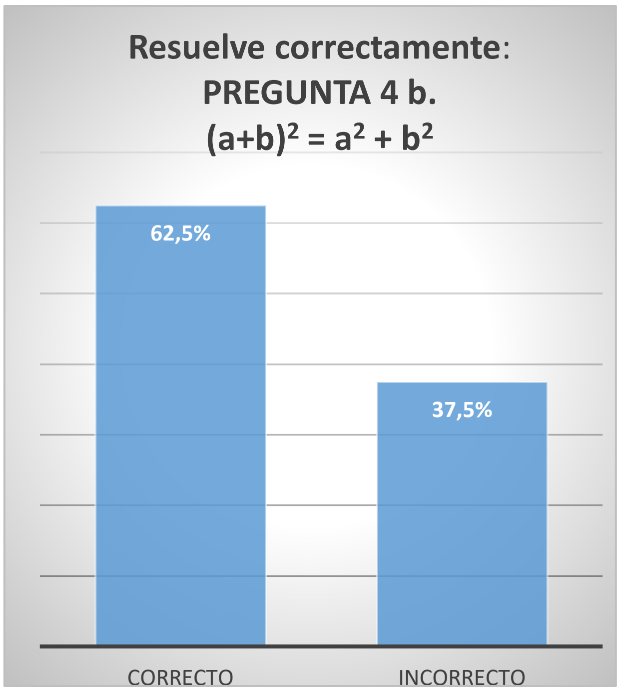


Ilustración 39: Diagrama de barras PREGUNTA 4b.: Resuelve correctamente: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

CONCLUSION: El 62,5% de los estudiantes identificó y respondió correctamente el ejercicio, el 37,5% restante lo trabajo pero, lo resolvió de manera incorrecta

PREGUNTA 4c. Resuelve correctamente (a+b)(a-b) = $a^2 + b^2$

Respuestas	*Porcentaje*	*Frecuencia*
CORRECTO	83,3%	20
INCORRECTO	16,7%	4
TOTAL	100,0%	24

Tabla 12: Frecuencia pregunta 4c. Resuelve correctamente (a+b)(a-b) = $a^2 + b^2$

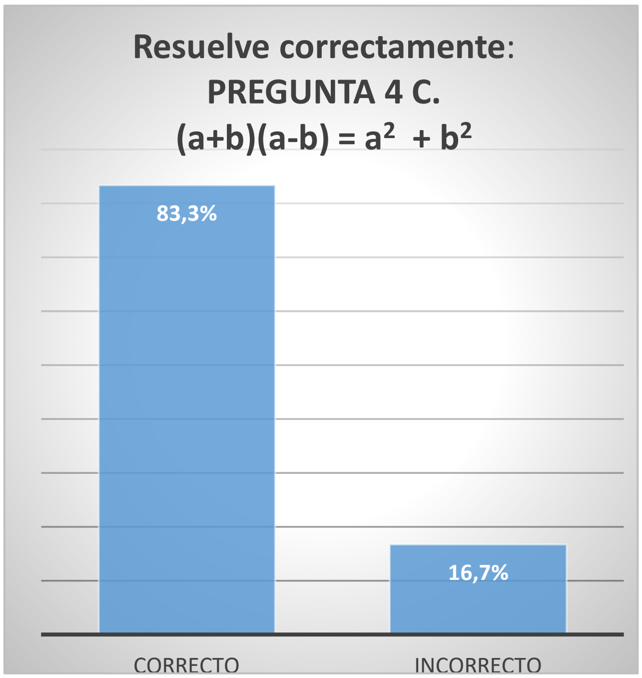


Ilustración 40: Diagrama de barras pregunta 4c. Resuelve correctamente (a+b)(a-b) = $a^2 + b^2$

CONCLUSION: El 83,3% de los estudiantes identificó y respondió correctamente el ejercicio, el 16,7% restante lo trabajo, pero lo resolvió de manera incorrecta

PREGUNTA 5: FACTORIZAR LAS SIGUIENTES EXPRESIONES EN TÉRMINOS DE BASE POR ALTURA Y VERIFICAR QUE FIGURA SE FORMA UTILIZANDO CAJA DE POLINOMIOS (A = X; B = Y)

PREGUNTA 5a. Factoriza correctamente con caja de polinomios $a^2 – 2ab + b^2$

Respuestas	***Porcentaje***	***Frecuencia***
CORRECTO	50,0%	12
INCORRECTO	25,0%	6
NO RESOLVIO	25,0%	6
TOTAL	100,0%	24

Tabla 13: Frecuencia pregunta 5a. Factoriza correctamente con caja de polinomios $a^2 – 2ab + b^2$

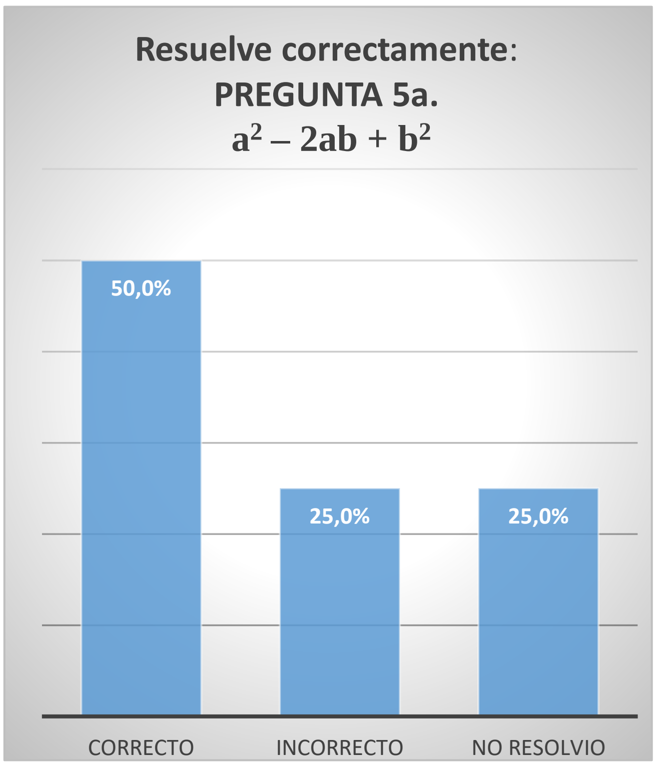


Tabla 14:Diagrama de barras pregunta 5a. Factoriza correctamente con caja de polinomios $a^2 – 2ab + b^2$

CONCLUSION: El 50% de los estudiantes identificó, utilizó la caja de polinomios y respondió correctamente el ejercicio, el 25% utilizó la caja de polinomios, pero lo resolvió de manera incorrecta y el otro 25% no resolvió el ejercicio

PREGUNTA 5b. Factoriza correctamente con caja de polinomios $10x^2+5x+20x$		
Respuestas	**Porcentaje**	**Frecuencia**
CORRECTO	45,8%	11
INCORRECTO	4,2%	1
NO RESOLVIO	41,7%	10
INCOMPLETO	8,3%	2
TOTAL	100,0%	24

Tabla 15: Frecuencia pregunta 5b. Factoriza correctamente con caja de polinomios $10x^2+5x+20x$

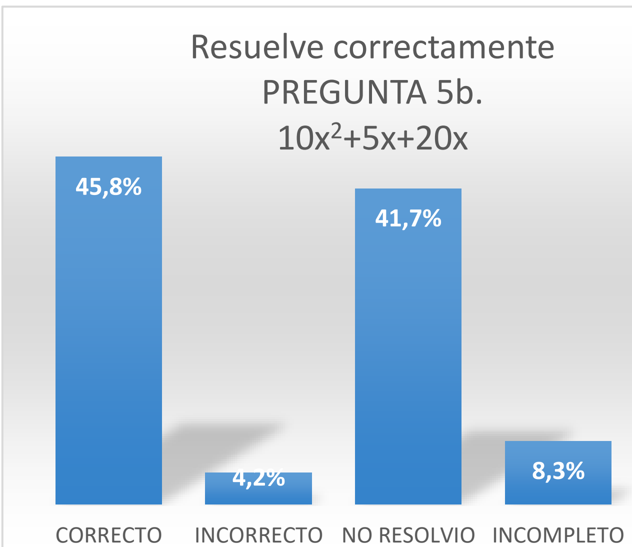


Ilustración 41: Diagrama de barras pregunta 5b. Factoriza correctamente con caja de polinomios $10x^2+5x+20x$

CONCLUSION: El 45,8% de los estudiantes identificó, utilizó la caja de polinomios y respondió correctamente el ejercicio, el 4,2% utilizó la caja de polinomios, pero lo resolvió de manera incorrecta; el 8,3% de los estudiantes presento los resultados incompletos y el otro 41,7% no resolvió el ejercicio

PREGUNTA 6: ¿Considera el método tradicional para aprender a factorizar mejor que el método con los juegos?

Respuestas	***Porcentaje***	***Frecuencia***
SI	29,2%	7
NO	70,8%	17
TOTAL	100,0%	24

Tabla 16: Frecuencia pregunta 6: ¿Considera el método tradicional para aprender a factorizar mejor que el método con los juegos?

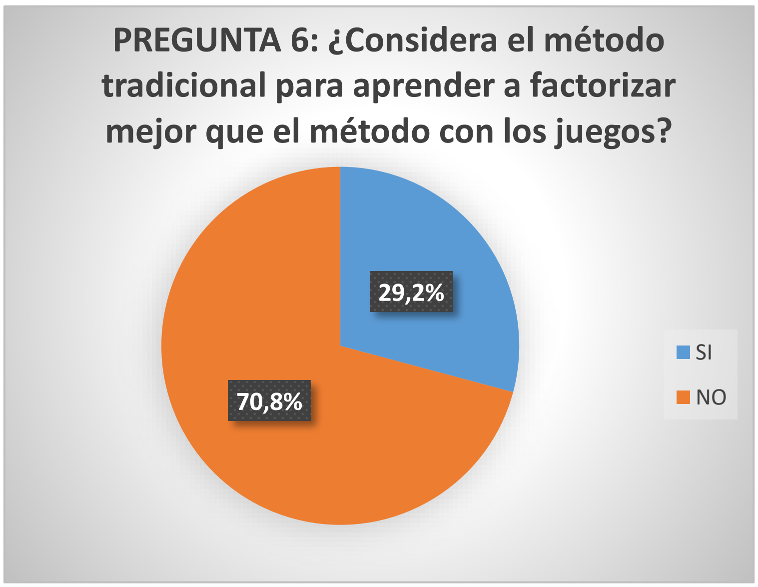


Ilustración 42: Grafico circular pregunta 6: ¿Considera el método tradicional para aprender a factorizar mejor que el método con los juegos?

Conclusión: El 70,8% considera que los juegos son un mejor método para aprender a factorizar por el contrario el 29,2% considera que es mejor el método tradicional.

PREGUNTA 7: ¿Cuál de los siguientes juegos le facilita identificar los diferentes métodos de factorización?		
Respuestas	***Porcentaje***	***Frecuencia***
DOMINO	45,8%	11
CONCENTRESE	58,3%	14
ESCALERA	70,8%	17
TIC	50,0%	12

Tabla 17: Frecuencia pregunta 7: ¿Cuáles juegos le facilitan identificar los diferentes métodos de factorización?

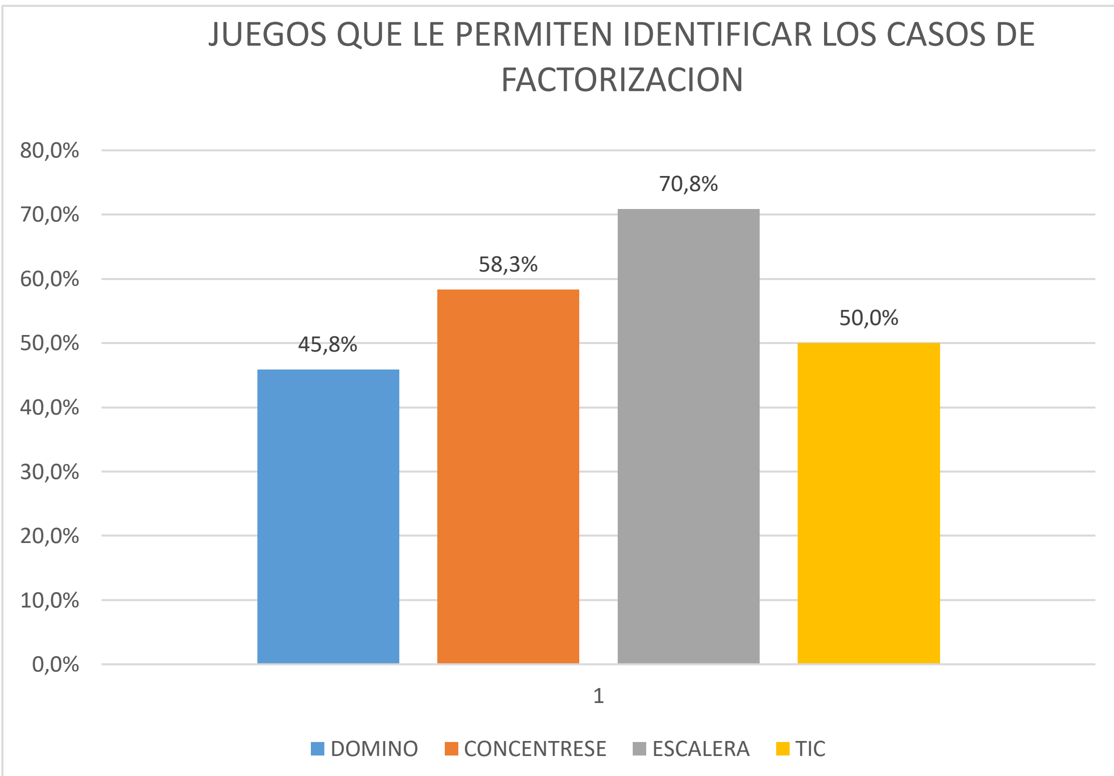


Ilustración 43: Diagrama de barras pregunta 7: ¿Cuáles juegos le facilitan identificar los diferentes métodos de factorización?

El grupo de estudiantes que participaron en la aplicación de los juegos pudo seleccionar los juegos que más les sirvieron para mejorar su aprendizaje en el proceso de factorización y seleccionaron los juegos así:

La Escalera el 70,8% de veces

Concéntrese el 58,3% de veces

El juego del Recurso TIC 50% de veces

Y el dominó el 45,8 % de veces

Durante el año escolar pudo determinarse con base en las evaluaciones que:

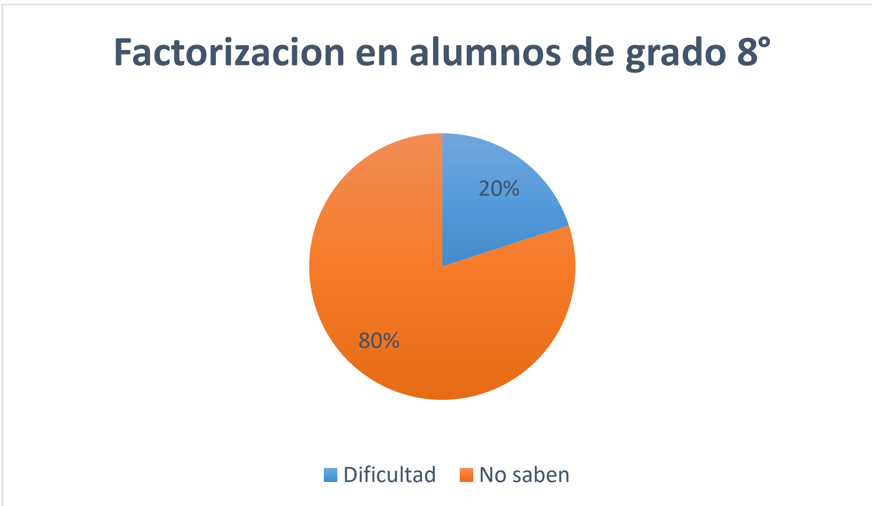


Ilustración 44: Grafico circular Factorización en alumnos de grado 8

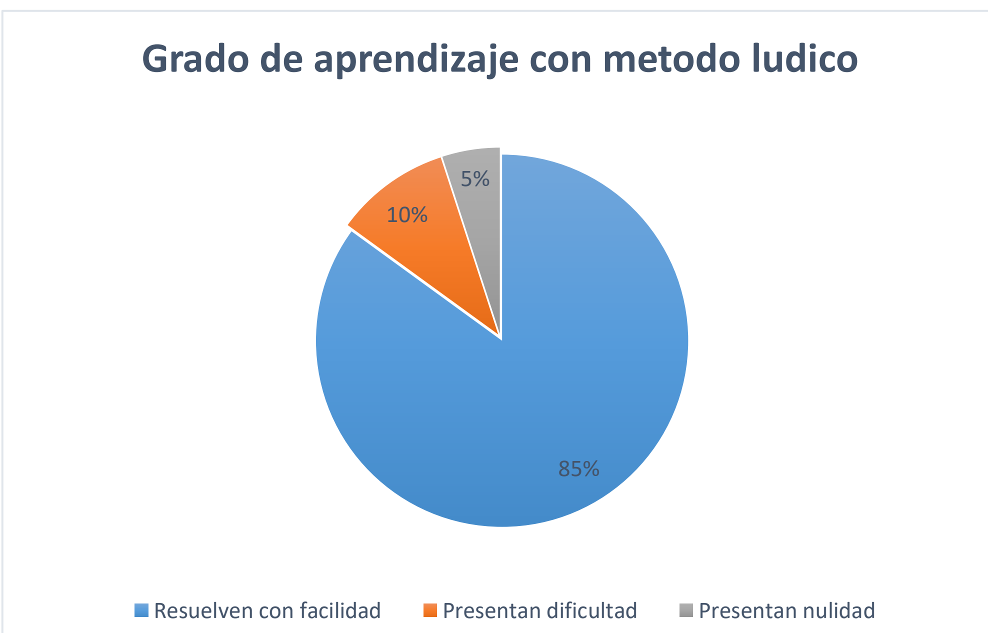


Ilustración 45: Grado de aprendizaje con metodo lúdico

12. CONCLUSIONES

12.1. CONCLUSIONES ESTADÍSTICAS

Tomando en cuenta las hipótesis planteadas en la investigación y citadas a continuación se exponen las siguientes conclusiones:

La hipótesis general planteada de la siguiente forma ¨ La aplicación de estrategias lúdicas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la factorización incide en el desarrollo del razonamiento lógico y factorial en los niños y niñas de grados 8° y 9° del Instituto Técnico Superior .¨, es aceptada ya que por medio de la administración de una lista de cotejo al inicio y una rúbrica al final del proceso se comprobó que al aplicar estrategias lúdicas con juegos tradicionales adaptados a la factorización, hay un aumento significativo en la adquisición de los conocimientos del objeto matemático y se mejora la resolución de problemas, debido a que los niños y niñas comprenden y aplican de una manera eficaz los conceptos adquiridos.

En cuanto a las hipótesis específicas: ¨La aplicación de conceptos básicos es importante para el desarrollo del razonamiento lógico numérico y factorial, en la resolución de problemas de factorización, en los niños y niñas de grado 8° Y 9° del Instituto Técnico Superior¨ se aceptan las hipótesis y se concluye que con la comprensión de conceptos se logra potencializar el aprendizaje y el desarrollo integral de los niños y niñas, creando en ellos un alto nivel de aceptación por las matemáticas en este caso por el Algebra.

12.2. CONCLUSIONES TEÓRICAS

La aplicación de estrategias lúdicas con juegos tradicionales como escalera, concéntrese, juegos de competencia con ayuda de las TIC y domino, y el uso de la caja de polinomios en el desarrollo del área del razonamiento lógico numérico para la factorización ayudan a una mejor comprensión de los contenidos algebraicos que se desarrollan, ya que estas permiten a los niños y niñas adquirir experiencias por medio de los sentidos, facilitándoles la manipulación, descubrimiento, comunicación de ideas y conocimientos, de esta forma se logra un aprendizaje significativo e integral que les ayuda en la resolución de problemas de factorización, empleando como principal recurso el juego.

Las operaciones algebraicas de factorización, antes de ser una actitud puramente intelectual, requieren la construcción de estructuras internas y del manejo de ciertas nociones del objeto matemático, que son ante todo producto de la acción y relación del estudiante con objetos y sujetos pudiendo realizar registros de representación semiótica, y que a partir de una reflexión por medio del juego le permiten adquirir las nociones fundamentales de clasificación, seriación y factorización, las cuales benefician en la estimación de cantidades, manipulación de conjuntos, métodos de factorización y operaciones algebraicas (suma y resta de polinomios, tipos de cuadrados etc..).

Las estrategias lúdicas sensorio motrices como escalera y otros juegos tradicionales permiten a los y las docentes desarrollar contenidos de forma dinámica y motivacional, de manera que puedan captar y retener la atención de los niños y niñas más fácilmente involucrándolos en el desarrollo de los contenidos y evitando la monotonía en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Las estrategias lúdicas permiten a los y las docentes tomar en cuenta dentro del salón de clases el desarrollo del razonamiento para factorizar y realizar operaciones algebraicas, englobando así acciones, actitudes, decisiones y propuestas para que el impacto de estas sea positivas y vivenciadas por los estudiantes y de esta manera desarrollarán capacidades de reflexión y análisis en la resolución de problemas algebraicos de factorización.

Los niños y niñas construyen sus conocimientos interactuando con su entorno social, lo cual les permite lograr una consolidación de capacidades que deben ser potencializadas dentro del aula a través de actividades verbales, actividades concretas (objetos reales) y actividades abstractas (uso de símbolos) todo esto con el propósito de favorecer el pensamiento lógico que a su vez estimula su desarrollo intelectual

13. RECOMENDACIONES

Para futuras implementaciones de esta propuesta didáctica sería importante explorar la utilización de otros juegos tradicionales.

Los juegos a utilizar deben ser acordes a las edades y etapas de desarrollo de los estudiantes de los grupos con los que se implemente.

Hacer un proceso de vinculación entre las TIC y los juegos tradicionales con el fin de generar nuevas ayudas didácticas.

Los juegos didácticos aquí planteados pueden implementarse con otras temáticas y aún con otras asignaturas que hagan parte de ciencias básicas matemáticas como física, química, economía, entre otras

14. BIBLIOGRAFÍA

(s.f.).

Artigue, M. (30 de Noviembre de 2015). Ingeniería Didáctica Recuperado. Obtenido de www.cimm.ucr.ac.cr/edefaria

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gomez, P. (enero de 1995). *Ingeniería Didáctica en Educación matemática*. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/277733635.

Duval. (2000). Elementos básicos para la investigación en matemática educativa. *24 conferencia del grupo internacional para la psicología de la educación matemática*, 55-59. Hiroshima: Hiroshima University.

Duval. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 143 - 148.

Federación de Enseñanza de CCOO de Andalucía. (Noviembre de 2010). La estimulación educativa. *Temas para la Educación* (11). Obtenido de https://www.feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd7581.pdf

ICFES. (2014). *Resultados Nacionales Período 2009 - 2014.*

Martinez, R. E. (s.f.). El juego como escuela de vida: Karl Groos.

Mejia Palomino, M. F. (2004). Análisis Didáctico de la Factorización de Expresiones Polinómicas Cuadráticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Min Educación Colombia. (s.f.). *Lineamientos Curriculares*. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

MinEducación Colombia. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá.

MinEducación Colombia. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje DBA.

Monge, M. J., Orozco Davila, H. M., & Gonzalez Aguilar, I. (24 de abril de 2013). Factores Metodológicos en la enseñanza - aprendizaje de los casos de factorización. *Universidad y Ciencia, 7*(11).

Ospina Sepúlveda, M. E. (2015). Guía Didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes CLEI IV del ITM. (U. N. Colombia, Ed.) Medellín: Facultad de Ciencias.

Oviedo, L. M., & Kanashiro, A. M. (2012). Los registros de representación en matemáticas. *Aula Universitaria 13*, 29 a 36.

Pereira, I. T. (s.f.). Manual de Convivencia.

Rechimont, E., & Ascheri, M. (2004). Registros de Representación Semiótica en el concepto "Resolución numérica de ecuaciones polinómicas" Análsis a Priori. Argentina: Universidad Nacional de la Pampa .

Valencia Cárdenas, M. S. (2012). Aplicación de la Estrategía Didáctica de Organizadores Gráficos en el Aprendizaje de Productos Notables y Factorización de los estudiantes de 9 año de educación General Básica del Colegio Nacional Veracruz del Cantón Pastaza. Ecuador: Universidad Tecnica de Ambato.

Villaroel Solis, J. M. (2014). *Tesis propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica "caja de polinomios", en estudiantes de grado octavo de la I.E. María.* Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

15. ANEXOS

15.1. ANEXO 1: FICHAS DEL CONCENTRESE

Hallar el MCD, tomar las letras comunes con el menor exponente. Abrir paréntesis y dividir cada término entre el factor común (restando los exponentes)	Tiene la forma $x^2 + bx + c$
Tomar el paréntesis común y dividir cada término entre el común	El factor común es un conjunto entre paréntesis.
Sacar raíz cuadrada del primero, signo del segundo y raíz cuadrada del tercero. Asociar entre paréntesis y elevar al cuadrado	Siempre son tres términos. El primero y el tercero siempre son positivos y tienen raíz cuadrada

Abrir dos pares de paréntesis: uno con menos (-) y el otro con más (+). Sacar raíz cuadrada del primero y del segundo. Repetir lo mismo en los dos paréntesis.	Siempre son dos términos que tienen raíz cuadrada, siempre es una resta
Abrir dos pares de paréntesis, colocar la raíz cuadrada del primero en cada paréntesis; en el primer paréntesis poner el signo del segundo término y en el segundo paréntesis poner la multiplicación de los signos de segundo y tercer término. Si los signos de los paréntesis son iguales, buscar dos números que sumados den el segundo y multiplicado den el tercer término. Si los signos de los paréntesis son opuestos, buscar dos números que restados den el segundo y multiplicados den el tercer término. El número mayor se anota en el primer paréntesis.	Existe un factor común en todos los términos. Los números pueden factorizarse en este caso si existe máximo común divisor (MCD) entre ellos
Descomponer el primer y tercer término en dos factores, multiplicar en diagonal y sumar sus resultados, si la suma da el segundo término, entonces poner cada fila entre paréntesis.	Tiene la forma $ax^2 + bx + c$

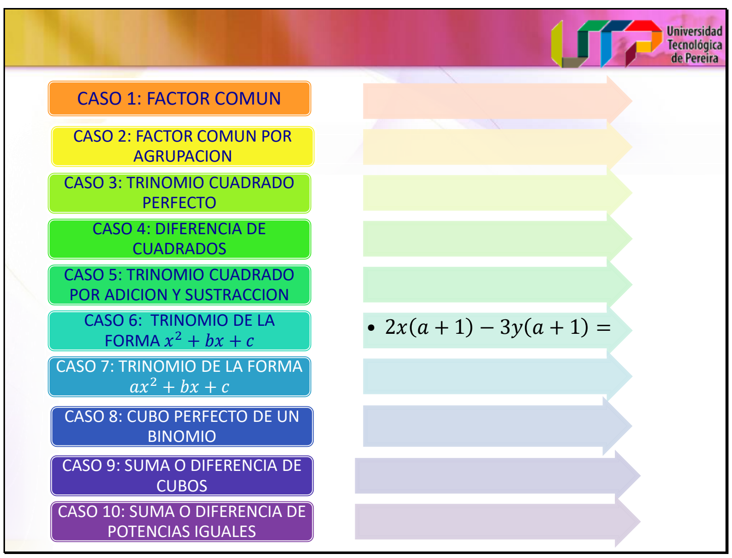
Abrir dos pares de paréntesis. Colocar el coeficiente del primer término en cada paréntesis y en el denominador. Multiplicar el primer término con el tercero y proseguir como el caso VI, luego simplificar el denominador con los coeficientes de un paréntesis, si sobra algo en el denominador usarlo para simplificar con el otro paréntesis.	Tiene la forma $ax^2 + bx + c$
Sacar raíz cúbica del primero, poner signo positivo si todos son positivos, signo negativo, si son intercalados, sacar raíz cúbica del cuarto término, asociar entre paréntesis y elevar al cubo.	Siempre son 4 términos, todos positivos o intercalados (+ , - , + , -) y el primer y cuarto término tienen raíz cúbica.
Cuando es una suma: Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz cúbica del primero más (+) raíz cúbica del segundo, en el segundo paréntesis: el primero al cuadrado menos (-) el primero por el segundo más (+) el segundo al cuadrado. **Cuando es una resta**: Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz cúbica del primero menos (-) raíz cúbica del segundo, en el segundo paréntesis: el primero al cuadrado más (+) el primero por el segundo más (+) el segundo al cuadrado.	Siempre son dos términos sumados o restados que tienen raíz cúbica

Abrir dos pares de paréntesis, en el primer paréntesis sacar raíz de ambos términos y en el segundo paréntesis poner un polinomio donde el primer término vaya decreciendo y el segundo término vaya creciendo. Si es una suma, el polinomio es de signos intercalados y si es una resta, el polinomio es de signos	Siempre son dos términos sumados o restados que tienen raíz quinta, séptima u otra raíz impar.

15.2. ANEXO 2: DIAPOSITIVAS JUEGO TIC

Diapositiva 1

Diapositiva 2



Diapositiva 3

Diapositiva 4

Diapositiva 5

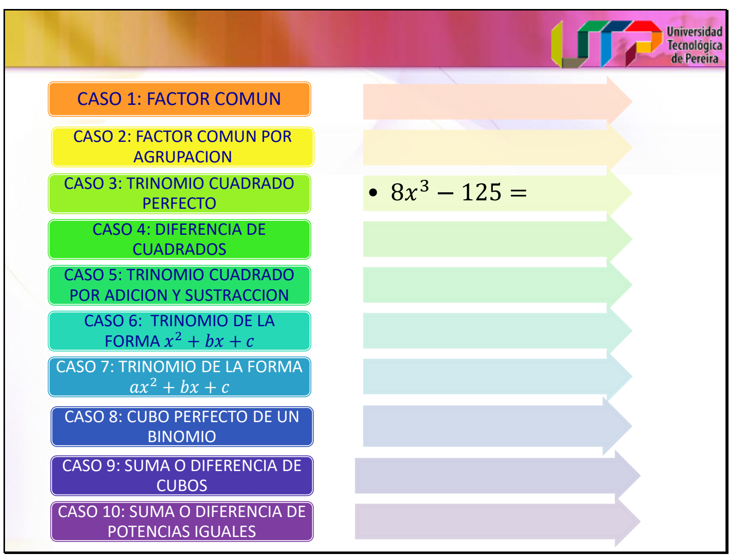
Diapositiva 6

Diapositiva 7

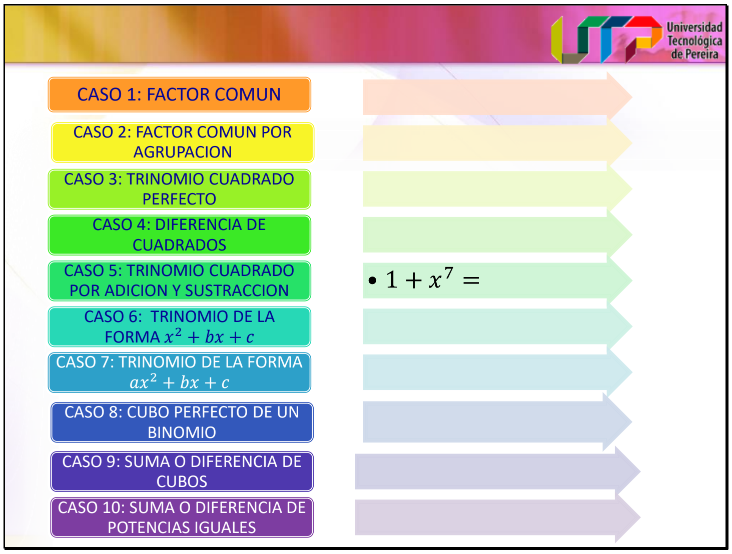
Diapositiva 8

Diapositiva 9

Diapositiva 10



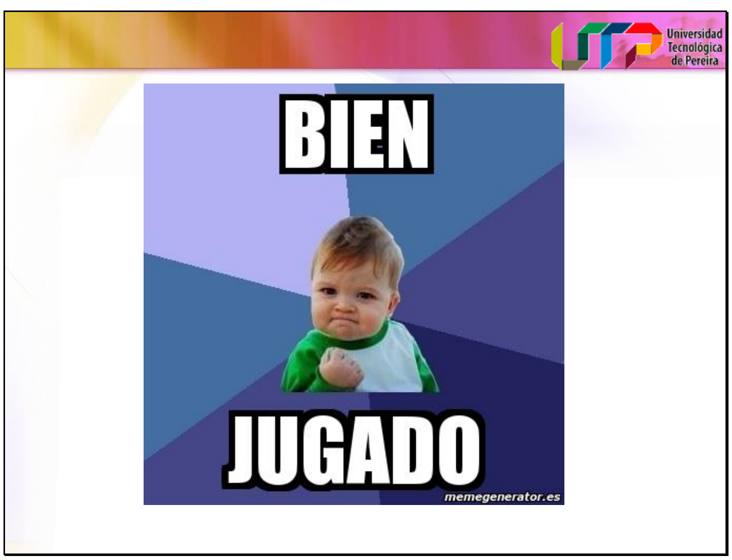
Diapositiva 11



Diapositiva 12

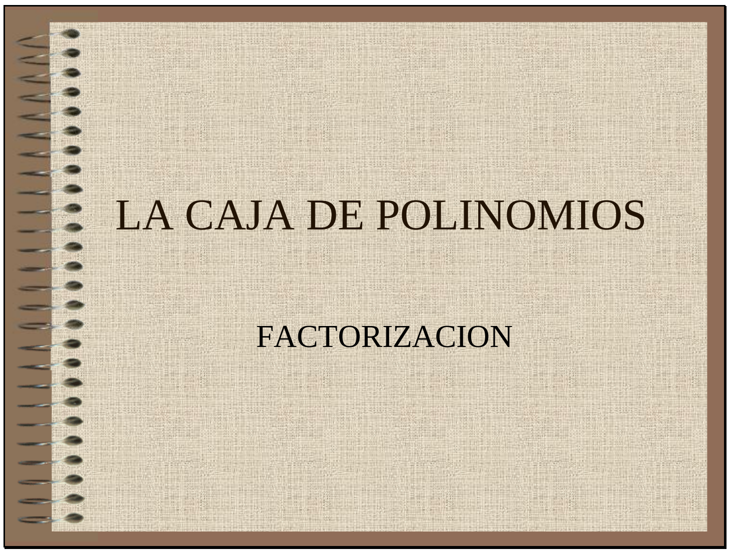
Diapositiva 13

Diapositiva 14



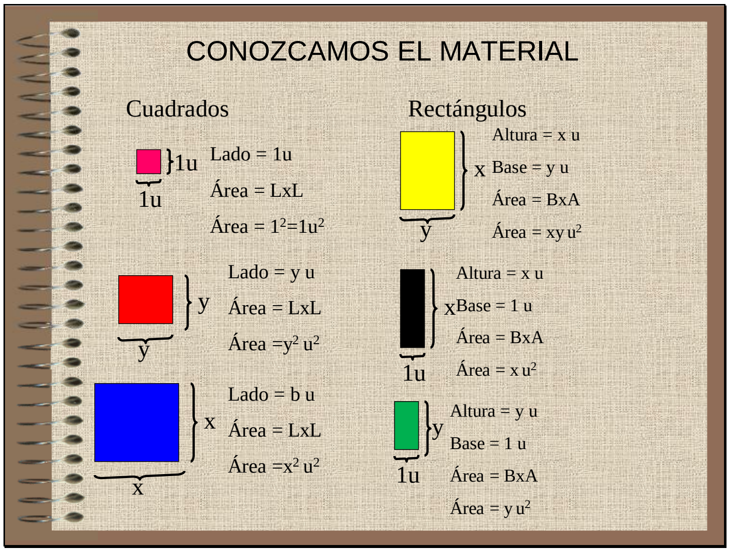
15.3. ANEXO 3: DIAPOSITIVAS LA CAJA DE POLINOMIOS

Diapositiva 1

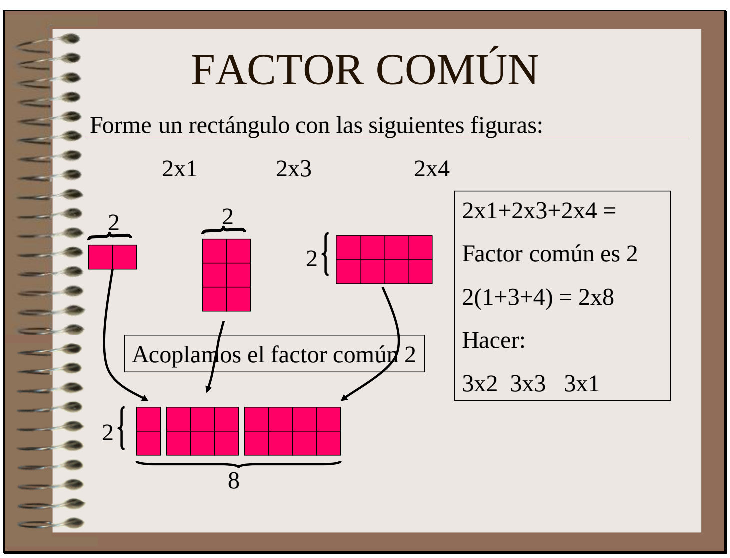


Diapositiva 2

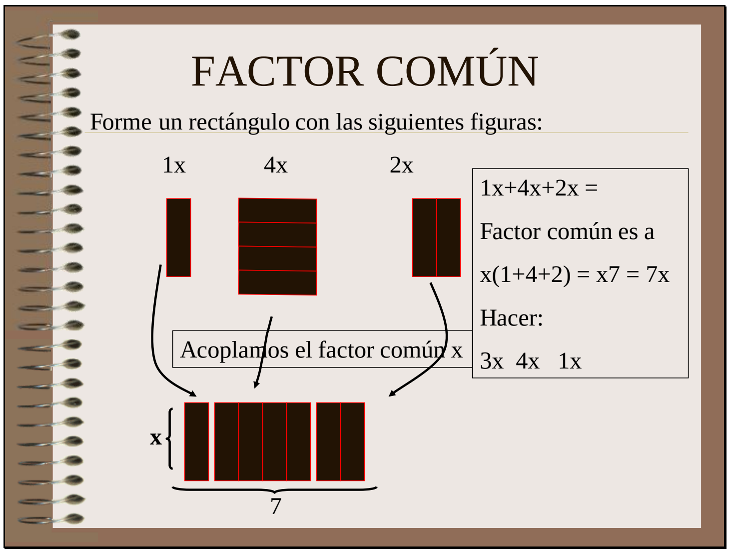
Diapositiva 3



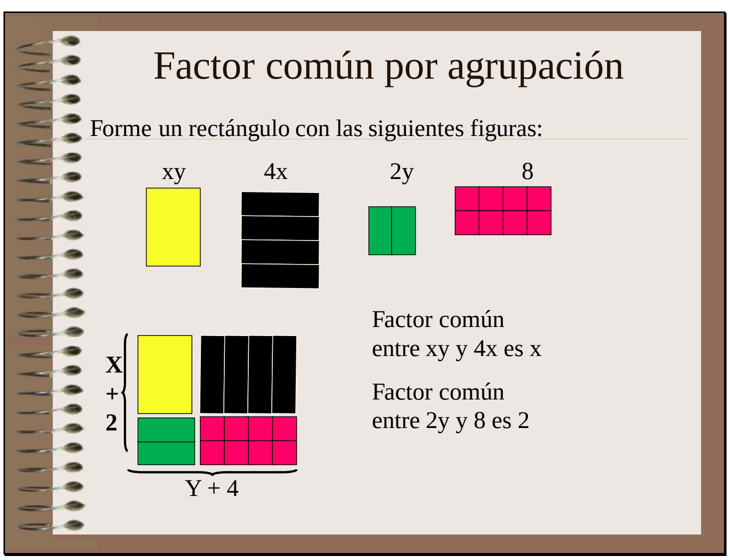
Diapositiva 4



Diapositiva 5



Diapositiva 6



Diapositiva 7

FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN

yx + 4x + 2y +8 u = asociemos los factores comunes:

(yx + 4x) + (2y +2*4) = factor común en cada asociación

x(y+4) + 2(y + 4) = ahora el factor común es y +4

(y +4)(x + 2) Que es la factorización de la primera expresión

y**x + 4x + 2y +8 u = (y+4)(x + 2)**

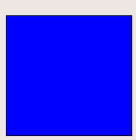
Que son la base y la altura del rectángulo anterior

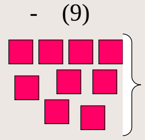
Diapositiva 8

DIFERENCIA DE CUADRADOS

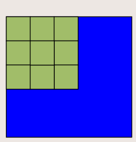
Forme un rectángulo con las siguientes figuras:

x*x - (9)

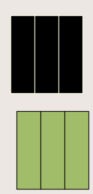




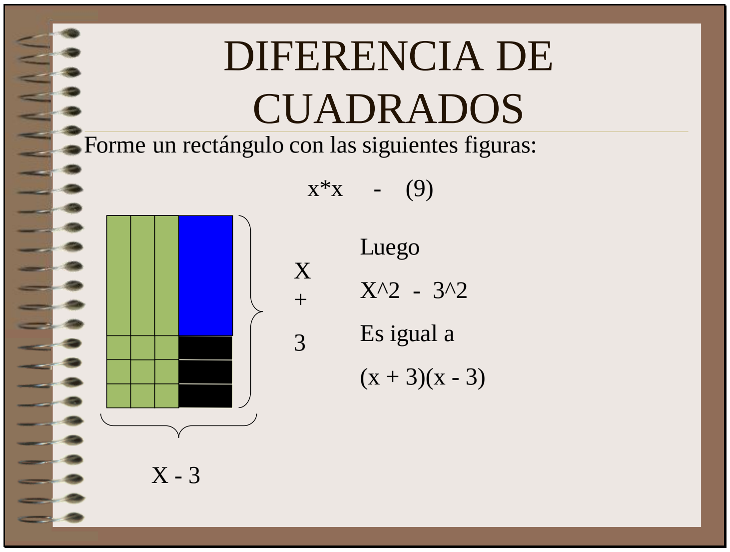
Como es negativo tiene que estar encima de x*x



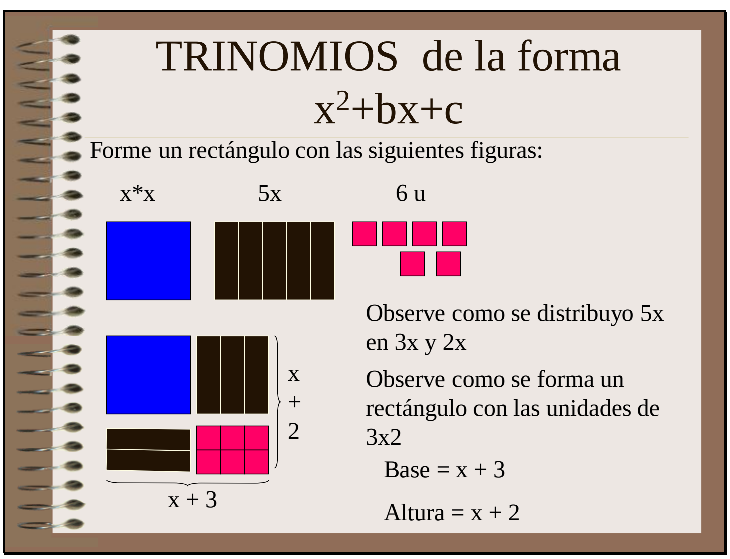
Sumemos un 3x y restemos un 3x, de manera que sumamos un cero



Diapositiva 9



Diapositiva 10



Diapositiva 11

TRINOMIOS de la forma x^2+bx+c

x*x + 5x + 6 u = Abrimos dos paréntesis.

(   ) (   ) = Sacamos la raíz cuadrada del primer termino x*x = x y lo ubicamos en cada paréntesis.

(x   ) (x   ) = El primer signo lo colocamos en el primer paréntesis y lo multiplicamos por el segundo signo, el resultado se coloca en el segundo paréntesis

(x +   ) (x +   ) = Como son signos iguales, buscamos dos números que multiplicados den 6u y sumados den 5x, que son 3 y 2, los colocamos en cada paréntesis:

(x + 3) (x + 2) = Que son la factorización de la primera expresión

x*x + 5x + 6 u = (x + 3) (x + 2)

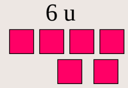
Que son la base y la altura del rectángulo anterior

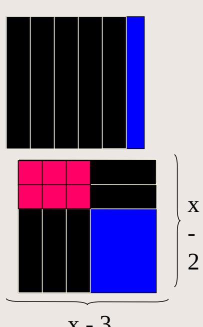
Diapositiva 12

TRINOMIOS de la forma x^2 - bx+c

Forme un rectángulo con las siguientes figuras:

x*x -5x Es colocado encima   6 u





Observe como se distribuyo -5x en -3x Horizontales y -2x Verticales

Observe como se forma un rectángulo con las unidades de 3x2 y además positivos

Base = x - 3

Altura = x - 2

Diapositiva 13

TRINOMIOS de la forma $x^2 - bx+c$

x*x - 5x + 6 u = Abrimos dos paréntesis.

(   ) (   ) = Sacamos la raíz cuadrada del primer termino x*x = x y lo ubicamos en cada paréntesis.

(x   ) (x   ) = El primer signo lo colocamos en el primer paréntesis y lo multiplicamos por el segundo signo, el resultado se coloca en el segundo paréntesis

(x -   ) (x -   ) = Como son signos iguales, buscamos dos números que multiplicados den 6u y sumados den 5x, que son 3 y 2, los colocamos en cada paréntesis:

(x -   3) (x - 2) = Que son la factorización de la primera expresión

x*x - 5x + 6 u = (x -   3) (x - 2)

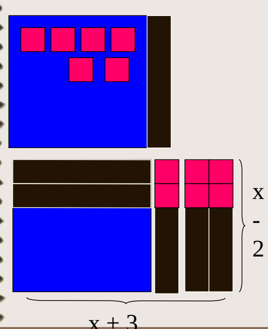
Que son la base y la altura del rectángulo anterior

Diapositiva 14

TRINOMIOS de la forma $x^2 + bx - c$

Forme un rectángulo con las siguientes figuras:

x*x   x   -6 u(encima)



Observe como se aplica el inverso aditivo sumando y restando x a las áreas

Observe como se forma un rectángulo con las unidades de 3x2 y además negativos.

Base = x + 3

Altura = x - 2

Diapositiva 15

TRINOMIOS de la forma x^{2} + bx+c

x*x + x - 6 u = Abrimos dos paréntesis.

(   ) (   ) = Sacamos la raíz cuadrada del primer termino x*x = x y lo ubicamos en cada paréntesis.

(x   ) (x   ) = El primer signo lo colocamos en el primer paréntesis y lo multiplicamos por el segundo signo, el resultado se coloca en el segundo paréntesis

(x +   ) (x -   ) = Como no son signos iguales, buscamos dos números que multiplicados den 6u y restados nos den 1x, que son 3 y 2, los colocamos en cada paréntesis:

(x + 3) (x - 2) = Que son la factorización de la primera expresión

x*x + x -+ 6 u = (x + 3) (x - 2)

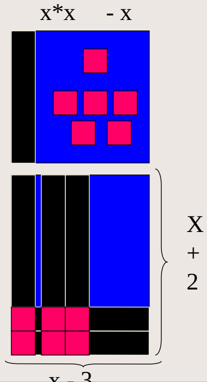
Que son la base y la altura del rectángulo anterior

Diapositiva 16

TRINOMIOS de la forma x^{2} - bx - c

Forme un rectángulo con las siguientes figuras:

x*x   - x   -6 u(encima)



Observe como se aplica el inverso aditivo sumando y restando x a las áreas

Observe como se forma un rectángulo con las unidades de 3x2 y además negativos.

Base = x - 3

Altura = x + 2

Diapositiva 17

TRINOMIOS de la forma $x^{2} + bx+c$

x*x - x - 6 u = Abrimos dos paréntesis.

(   ) (   ) = Sacamos la raíz cuadrada del primer termino x*x = x y lo ubicamos en cada paréntesis.

(x   ) (x   ) = El primer signo lo colocamos en el primer paréntesis y lo multiplicamos por el segundo signo, el resultado se coloca en el segundo paréntesis

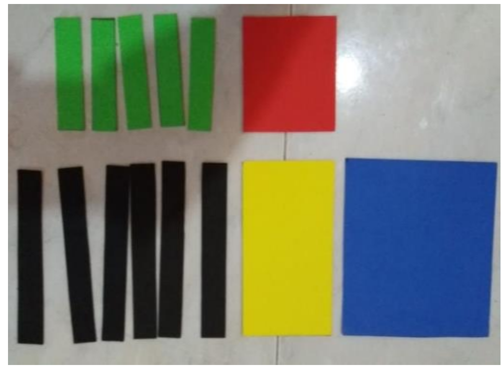
(x -   ) (x +   ) = Como no son signos iguales, buscamos dos números que multiplicados den 6u y restados nos den 1x, que son 3 y 2, los colocamos en cada paréntesis:

(x -   3) (x + 2) = Que son la factorización de la primera expresión

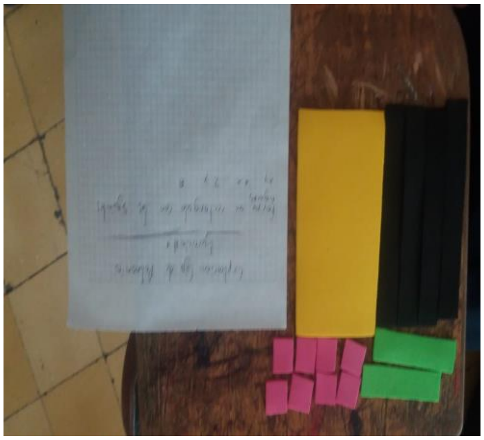
x*x - x - 6 u = (x -   3) (x + 2)

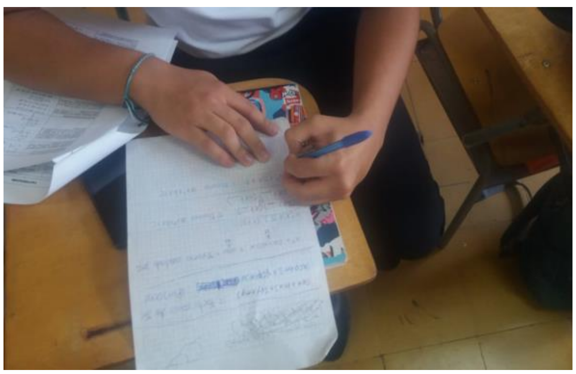
Que son la base y la altura del rectángulo anterior

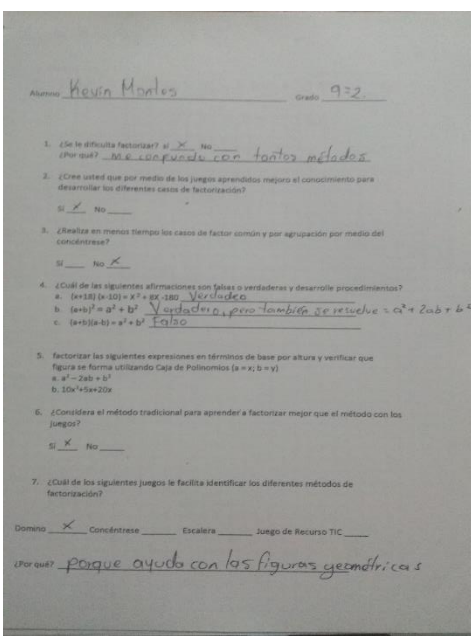
15.4. ANEXO 4: FOTOGRAFIAS JUEGO ESCALERA Y LIZADERO QUE FACTORIZA



15.5. ANEXO 5: FOTOS







Alumno Kevin Montes Grado 9-2

1. ¿Se le dificulta factorizar? sí X No ____
¿Por qué? me confundo con tantos métodos

2. ¿Cree usted que por medio de los juegos aprendidos mejoro el conocimiento para desarrollar los diferentes casos de factorización?

Sí X No ____

3. ¿Realiza en menos tiempo los casos de factor común y por agrupación por medio del concéntrese?

Sí ____ No X

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y desarrolle procedimientos?
a. $(x+18)(x-10) = x^2 + 8x - 180$ Verdadeo
b. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ Verdadero, pero también se resuelve $= a^2 + 2ab + b^2$
c. $(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$ Falso

5. factorizar las siguientes expresiones en términos de base por altura y verificar que figura se forma utilizando Caja de Polinomios $(a = x; b = y)$
a. $a^2 - 2ab + b^2$
b. $10x^2+5x+20x$

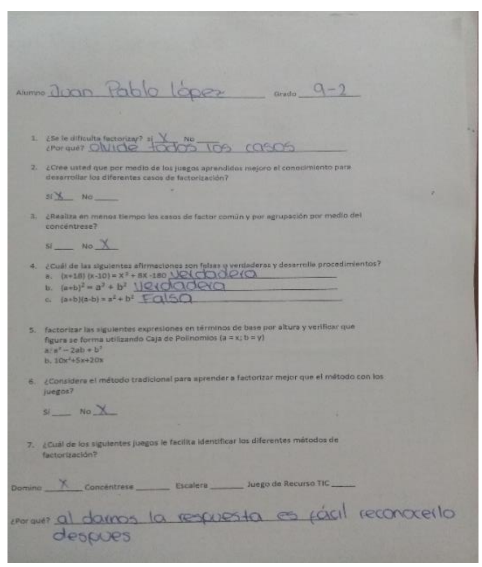
6. ¿Considera el método tradicional para aprender a factorizar mejor que el método con los juegos?

Sí X No ____

7. ¿Cuál de los siguientes juegos le facilita identificar los diferentes métodos de factorización?

Domino X Concéntrese ____ Escalera ____ Juego de Recurso TIC ____

¿Por qué? porque ayuda con las figuras geométricas



Alumno Juan Pablo López Grado 9-2

1. ¿Se le dificulta factorizar? sí X No ____
¿Por qué? Olvide todos los casos

2. ¿Cree usted que por medio de los juegos aprendidos mejoro el conocimiento para desarrollar los diferentes casos de factorización?

Sí X No ____

3. ¿Realiza en menos tiempo los casos de factor común y por agrupación por medio del concéntrese?

Sí ____ No X

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y desarrolle procedimientos?
a. $(x+18)(x-10) = x^2 + 8x - 180$ verdadera
b. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ verdadera
c. $(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$ Falsa

5. factorizar las siguientes expresiones en términos de base por altura y verificar que figura se forma utilizando Caja de Polinomios $(a = x; b = y)$
a. $a^2 - 2ab + b^2$
b. $10x^2+5x+20x$

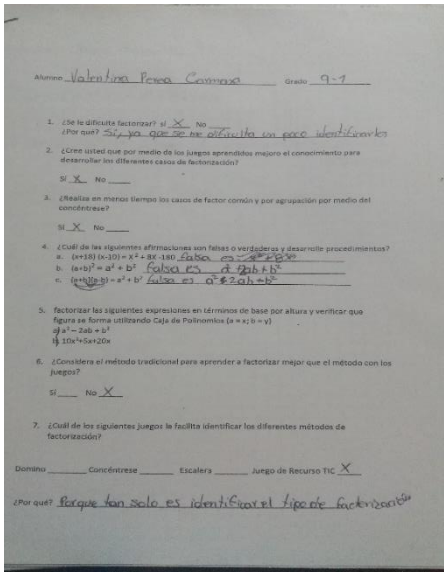
6. ¿Considera el método tradicional para aprender a factorizar mejor que el método con los juegos?

Sí ____ No X

7. ¿Cuál de los siguientes juegos le facilita identificar los diferentes métodos de factorización?

Domino X Concéntrese ____ Escalera ____ Juego de Recurso TIC ____

¿Por qué? al darnos la respuesta es fácil reconocerlo despues



Alumno Valentina Perea Carmona Grado 9-1

1. ¿Se le dificulta factorizar? Sí X No ___
¿Por qué? Sí, ya que se me dificulta un poco identificarlos

2. ¿Cree usted que por medio de los juegos aprendidos mejoro el conocimiento para desarrollar los diferentes casos de factorización?

Sí X No ___

3. ¿Realiza en menos tiempo los casos de factor común y por agrupación por medio del concéntrese?

Sí X No ___

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y desarrolle procedimientos?
a. $(x+18)(x-10) = x^2 + 8x - 180$ falsa es
b. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ falsa es $a^2 + 2ab + b^2$
c. $(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$ falsa es $a^2 - 2ab + b^2$

5. factorizar las siguientes expresiones en términos de base por altura y verificar que figura se forma utilizando Caja de Polinomios ($a = x$; $b = y$)
a) $a^2 - 2ab + b^2$
b) $10x^2+5x+20x$

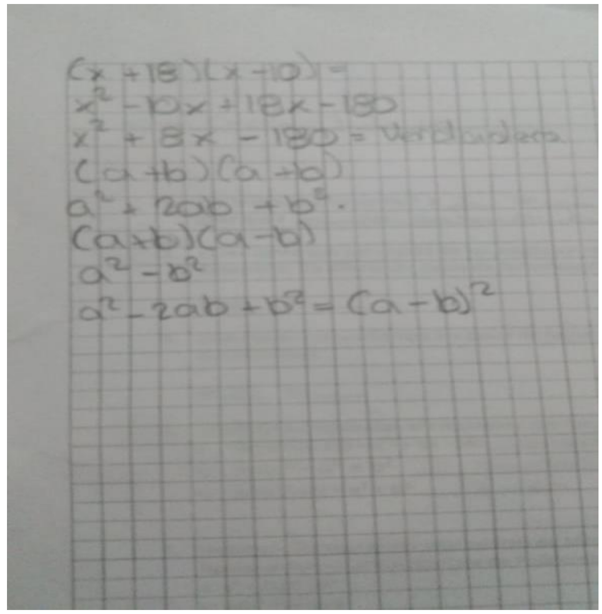
6. ¿Considera el método tradicional para aprender a factorizar mejor que el método con los juegos?

Sí ___ No X

7. ¿Cuál de los siguientes juegos le facilita identificar los diferentes métodos de factorización?

Domino ___ Concéntrese ___ Escalera ___ Juego de Recurso TIC X

¿Por qué? Porque tan solo es identificar el tipo de factorización



$(x+18)(x-10) =$
$x^2 - 10x + 18x - 180$
$x^2 + 8x - 180 =$ Verdadera
$(a+b)(a+b)$
$a^2 + 2ab + b^2$.
$(a+b)(a-b)$
$a^2 - b^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

15.6.ANEXO 6: TABULACION ENCUESTA															
	PREGUNTAS	**GRADO**	**PREGUNTA 1**		**porqué**			**PREGUNTA 2**		**PREGUNTA 3**		**PREGUNTA 4 A**		**correcto**	
	ESTUDIANTE		**SI**	**NO**	**Confunde los casos de factorización**	**no maneja bien los conceptos**	**No recuerda todos los casos**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**VERDADERO**	**FALSO**	**si**	**no**
1	Nicolas Espitia Mejia	905	1		1			1		1		1		1	0
2	Emanuel Osorío Arteaga	905	1				1	1		1		1		1	0
3	Santiago Osoriao Parra	908		1				1		1		1		1	0
4	Nataly Durán	909	1			1		1		1		1		1	0
5	Johan Daniel Espinel	908		1				1		1		1		1	0
6	Natalia Hernandez Fitzgerald	908		1				1		1		1		1	0
7	Juan Pablo Cardenas P	906	1					1		1		1		1	0
8	Pablo Restrepo Valencia	908	1			1		1		1		1		1	0
9	Santiago Ortiz Ortiz	907		1				1		1		1		1	0
10	Juan José González Restrepo	906		1				1		1		1		1	0
11	Cristian Holguin	909	1			1		1		1		1		1	0
12	Santiago Gutierrez S	908		1				1		1		1		1	0
13	Camilo Gallego Cardona	908	1		1			1		1		1		1	0

15.6.ANEXO 6: TABULACION ENCUESTA

	PREGUNTAS	GRADO	PREGUNTA 1		porqué			PREGUNTA 2		PREGUNTA 3		PREGUNTA 4 A		correcto	
	ESTUDIANTE		SI	NO	Confunde los casos de factorización	no maneja bien los conceptos	No recuerda todos los casos	SI	NO	SI	NO	VERDADERO	FALSO	si	no
14	Juan Camilo Zuluaga Londoño	905		1	1			1						0	0
15	Juan Pablo López	902	1				1	1			1	1		1	0
16	Maria Camila Valencia P	901		1				1				1		1	0
17	Jacobo Ossa	904		1				1		1		1		1	0
18	Mariana Martinez Garcia	904		1			1	1		1		1		1	0
19	Jordan Camilo Gil Restrepo	902		1			1	1		1		1		1	0
20	Kevin Montes	902	1		1			1			1	1		1	0
21	Ximena Florez Peña	902		1				1		1		1		1	0
22	Valeria Osorio Aguirre	903	1		1			1		1		1		1	0
23	Jimena Correa Diaz	901		1				1		1		1		1	0
24	Karen Andrea Osorio Alzate	905		1				1		1		1		1	0
24	**TOTALES**	**9 GRUPOS**	**10**	**14**	**5**	**3**	**4**	**24**	**0**	**20**	**2**	**23**	**0**	**23**	**0**

	PREGUNTAS	GRADO	PREGUNTA 4 B		correcto		PREGUNTA 4 C		correcto		PREGUNTA 5 A		
	ESTUDIANTE		**VERDADERO**	**FALSO**	**si**	**no**	**VERDADERO**	**FALSO**	**si**	**no**	**no respondio**	**CORRECTO**	**INCORRECTO**
1	Nicolas Espitia Mejia	905		1	1	0		1	1	0		1	
2	Emanuel Osorío Arteaga	905		1	1	0		1	1	0		1	
3	Santiago Osoriao Parra	908	1		0	1		1	1	0			1
4	Nataly Durán	909		1	1	0	1		0	1		1	
5	Johan Daniel Espinel	908		1	1	0		1	1	0			1
6	Natalia Hernandez Fitzgerald	908		1	1	0		1	1	0	1		
7	Juan Pablo Cardenas P	906		1	1	0		1	1	0		1	
8	Pablo Restrepo Valencia	908	1		0	1		1	1	0	1		
9	Santiago Ortiz Ortiz	907		1	1	0		1	1	0		1	
10	Juan José González Restrepo	906		1	1	0		1	1	0		1	
11	Cristian Holguin	909	1		0	1		1	1	0		1	
12	Santiago Gutierrez S	908		1	1	0		1	1	0			1
13	Camilo Gallego Cardona	908	1		0	1		1	1	0			1
14	Juan Camilo Zuluaga Londoño	905		1	1	0		1	1	0		1	
15	Juan Pablo López	902	1		0	1		1	1	0	1		
16	Maria Camila Valencia P	901	1		0	1	1		0	1		1	

	PREGUNTAS	**GRADO**	**PREGUNTA 4 B**		**correcto**		**PREGUNTA 4 C**		**correcto**		**PREGUNTA 5 A**		
	ESTUDIANTE		**VERDADERO**	**FALSO**	**si**	**no**	**VERDADERO**	**FALSO**	**si**	**no**	**no respondio**	**CORRECTO**	**INCORRECTO**
17	Jacobo Ossa	904		1	1	0		1	1	0		1	
18	Mariana Martinez Garcia	904		1	1	0		1	1	0	1		
19	Jordan Camilo Gil Restrepo	902	1		0	1		1	1	0			1
20	Kevin Montes	902	1		0	1		1	1	0	1		
21	Ximena Florez Peña	902	1		0	1		1	1	0			1
22	Valeria Osorio Aguirre	903		1	1	0	1		0	1	1		
23	Jimena Correa Diaz	901		1	1	0	1		0	1		1	
24	Karen Andrea Osorio Alzate	905		1	1	0		1	1	0		1	
24	**TOTALES**		**9**	**15**	**15**	**9**	**4**	**20**	**20**	**4**	**6**	**12**	**6**

	PREGUNTAS	GRADO	PREGUNTA 5B				PREGUNTA 6	
	ESTUDIANTE		**CORRECTO**	**INCORRECTO**	**no respondio**	**Incompleto**	**SI**	**NO**
1	Nicolas Espitia Mejia	905	1					1
2	Emanuel Osorío Arteaga	905	1					1
3	Santiago Osoriao Parra	908	1					1
4	Nataly Durán	909	1					1
5	Johan Daniel Espinel	908	1					1
6	Natalia Hernandez Fitzgerald	908			1			1
7	Juan Pablo Cardenas P	906			1		1	
8	Pablo Restrepo Valencia	908			1			1
9	Santiago Ortiz Ortiz	907	1					1
10	Juan José González Restrepo	906	1					1
11	Cristian Holguin	909			1		1	
12	Santiago Gutierrez S	908				1		1
13	Camilo Gallego Cardona	908				1		1
14	Juan Camilo Zuluaga Londoño	905			1		1	
15	Juan Pablo López	902	1					1
16	Maria Camila Valencia P	901			1		1	
17	Jacobo Ossa	904		1			1	
18	Mariana Martinez Garcia	904			1			1
19	Jordan Camilo Gil Restrepo	902			1			1
20	Kevin Montes	902	1				1	
21	Ximena Florez Peña	902			1			1

	PREGUNTAS	GRADO	PREGUNTA 5B				PREGUNTA 6	
	ESTUDIANTE		**CORRECTO**	**INCORRECTO**	**no respondio**	**Incompleto**	**SI**	**NO**
22	Valeria Osorio Aguirre	903			1			1
23	Jimena Correa Diaz	901	1					1
24	Karen Andrea Osorio Alzate	905	1				1	
24	**TOTALES**		**11**	**1**	**10**	**2**	**7**	**17**

PREGUNTAS	GRADO	PREGUNTA 7			
ESTUDIANTE		**DOMINO**	**CONCENTRESE**	**ESCALERA**	**JUEGO RECURSO TIC**
Nicolas Espitia Mejia	905	1		1	1
Emanuel Osorío Arteaga	905		1		1
Santiago Osoriao Parra	908	1		1	
Nataly Durán	909		1	1	1
Johan Daniel Espinel	908		1	1	
Natalia Hernandez Fitzgerald	908	1	1	1	1
Juan Pablo Cardenas P	906		1		1
Pablo Restrepo Valencia	908	1	1	1	
Santiago Ortiz Ortiz	907		1		
Juan José González Restrepo	906	1	1	1	
Cristian Holguin	909	1	1	1	
Santiago Gutierrez S	908		1	1	
Camilo Gallego Cardona	908	1	1		
Juan Camilo Zuluaga Londoño	905	1		1	1

Juan Pablo López	902	1		1	
Maria Camila Valencia P	901				1
Jacobo Ossa	904	1	1	1	
Mariana Martinez Garcia	904			1	1
Jordan Camilo Gil Restrepo	902				1
Kevin Montes	902	1		1	
Ximena Florez Peña	902		1		
Valeria Osorio Aguirre	903			1	1
Jimena Correa Diaz	901		1	1	1
Karen Andrea Osorio Alzate	905			1	1
TOTALES		**11**	**14**	**17**	**12**